МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МУРМАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра цифровых технологий, математики и экономики

Методическая разработка к выполнению расчетно-графической работы «Дифференциальное и интегральное исчисления функций нескольких переменных и их приложения»

по дисциплине: *Дополнительные разделы математического анализа*

для направлений: 09.03.01 *Информатика и вычислительная техника*, 09.03.02 *Информационные системы и технологии*
код направления (специальности)

бакалавриат, очная форма обучения
наименование специальности, форма обучения

Мурманск
2022

УДК 517.2(076)
ББК 22.161
М-54

Составитель: Кацуба Валентина Сергеевна, канд. физ.- мат. наук, доцент кафедры цифровых технологий, математики и экономики

Методическая разработка к выполнению расчетно-графической работы «Дифференциальное и интегральное исчисления функций нескольких переменных и их приложения» по дисциплине «Дополнительные разделы математического анализа» рассмотрена и одобрена на заседании кафедры-разработчика цифровых технологий, математики и экономики

24.05.2022 г., протокол №9 .

дата

Рецензент – Ромахова Ольга Андреевна, старший преподаватель кафедры цифровых технологий, математики и экономики.

Зарегистрировано как электронное издание МГТУ
Заказ
Уч-изд. листов

Оглавление

1. Общие организационно-методические указания

Выполнение РГР завершает изучение модуля «Дифференциальное и интегральное исчисление функций нескольких переменных» в дисциплине «Дополнительные разделы математического анализа» и включает в себя основные прикладные задачи по темам модуля.

Целевая установка: при выполнении РГР студент должен показать усвоенный материал по технике вычисления кратных, криволинейных и поверхностных интегралов, разобрать основные приложения этих интегралов к задачам геометрии и физики, а также приложения математического анализа ФНП в теории векторных и скалярных полей.

2. Задание, план выполнения, требования к оформлению

РГР содержит 8 заданий с указанным ниже содержанием.

Задание 1. Найти наибольшее и наименьшее значения функции двух переменных на замкнутой конечной области.

Задание 2. Определить характеристики двумерного скалярного поля: линии уровня, градиент, производную по заданному направлению.

Задание 3. Изменить порядок интегрирования в заданном повторном интеграле от функции двух переменных.

Задание 4. Три задачи на геометрические или механические приложения двойных интегралов.

Задание 5. Две задачи на приложения тройных интегралов.

Задание 6. Три задачи на основные приложения криволинейных интегралов первого и второго рода.

Задание 7. Одна задача на приложение поверхностного интеграла первого рода.

Задание 8. Три задачи на нахождение характеристик векторных полей.

Некоторые задачи РГР могут быть объявлены преподавателем как бонусные и, следовательно, как необязательные для решения.

Данная методическая разработка включает варианты заданий, количество вариантов 30.

Общие требования к оформлению РГР:

- решения задач должны быть оформлены рукописью в отдельной тетради;
- каждая задача должна иметь условие, подробное решение и ответ;
- в решении нужно ссылаться на теоретические факты (из темы РГР), с помощью которых строится решение;
- построение чертежей (или рисунков) и приведение подробных выкладок в решении обязательно;
- для построения поверхностей и линий рекомендуется привлекать прикладные математические пакеты и специальные компьютерные программы.

План выполнения РГР:

- РГР выдается на этапе перехода от темы «Дифференциальное исчисление ФНП» к теме «Интегральное исчисление ФНП» и выполняется как домашнее задание до конца прохождения модуля в течение примерно четырех недель;
- защита РГР включает фрагменты выполненных заданий и включает теоретические вопросы по модулю «Дифференциальное и интегральное исчисления ФНП».

3. Список рекомендуемых учебных ресурсов

1. Конспект лекций ведущего преподавателя дисциплины.

2. ЭКЛ «Дифференциальное исчисление ФНП» и «Интегральное исчисление ФНП», составленные ведущим преподавателем дисциплины.

3. Методическая разработка к выполнению РГР от преподавателя, ведущего дисциплину.

4. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления: Учебное пособие для вузов в 2 томах. Т.1,2.- М.: Интеграл-Пресс, 2001.

5. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. 2 часть. – М.: Рольф, 2000.– 288с.

6. Данко П.Б., Попов А.Г. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2-х частях. Часть 2: Учебное пособие для втузов. – М.: Высш. шк., 1996. – 304с.

4. Образец заданий одного варианта

***Задание* 1 (3 балла)**

Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = z(x, y)$ в замкнутой области *D*, ограниченной заданными линиями. Результаты решения вынести на область *D*, построенную в системе координат.

$$z = x^2 - xy + y^2 - 4x + 2y - 5,\ D: x = -2,\ y = -1,\ x + y = 3.$$

***Задание* 2 (3 балла)**

Дано двумерное скалярное поле $U = U(x, y)$, точка $M_0(x_0; y_0)$ и вектор $\vec{s}$:

$$U = x^2 - 2y,\quad M_0(1;-1),\quad \vec{s} = 2\vec{i} - \vec{j}\,.$$

Требуется:

1) определить уравнения линий уровня и $\overrightarrow{grad}\,U$, описать смысл этих характеристик скалярного поля; построить несколько линий уровня в системе координат xOy;

2) в точке M_0 найти градиент скалярного поля U, производную $\frac{\partial U}{\partial s}$ по заданному направлению $\vec{s}$ и величину скорости наибольшего возрастания функции U;

3) выполнить построение вектора $\overrightarrow{grad}\,U(M_0)$ и линии уровня, проходящей через точку M_0, описать их взаимное расположение; построить вектор $\vec{s}$, сравнить его направление с направлением $\overrightarrow{grad}\,U(M_0)$ и пояснить знак значения $\frac{\partial U}{\partial s}$.

Задание **3 (2 балла)**

Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)\,dx$.

Задание **4 (8 баллов)**

Используя двойной интеграл, вычислить указанные величины.

4.1 Площадь плоской фигуры, ограниченной линиями

$$x^2 + y^2 = 2y,\ y^2 - 2y + \frac{1}{2}x = 0.$$

4.2 Объем тела, ограниченного поверхностями

$$x^2 + y^2 = z - 1,\ \ x^2 + y^2 = -3z + 7.$$

4.3 Момент инерции относительно начала координат плоской фигуры, ограниченной линиями

$$x^2 + y^2 = 2x,\ x^2 + y^2 = 9,\ x = 0,\ y = 0\ (x \geq 0,\ y \geq 0),$$

если поверхностная плотность в точке с координатами (x; y) равна ординате этой точки.

Задание **5 (6 баллов)**

Используя тройной интеграл, вычислить указанные величины.

5.1 Объем тела, ограниченного поверхностями $(az)^2 = x^2 + y^2$ и $x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + 1,\ z \geq 0$.

5.2 Массу тела, ограниченного поверхностями $2x + z = 2a$, $x + z = a$, $y^2 = ax$, $y = 0\ (y \geq 0)$, если плотность в каждой его точке равна произведению абсциссы и ординаты этой точки.

Задание **6 (6 баллов)**

Используя криволинейные интегралы, определить указанные величины.

6.1 Работу, производимую силой $\vec{F} = \{y; -y - x^2\}$ при перемещении точечной массы $m = 1$ вдоль дуги линии $y = 2x - x^2$, расположенной над осью OX и проходимой по ходу часовой стрелки.

6.2 Массу окружности $x^2 + y^2 = ax,$ если линейная плотность материала в точке (x; y) равна расстоянию от этой точки до начала координат.

6.3 Функцию $U(x, y)$ по ее полному дифференциалу $dU = \dfrac{(x+y)dx-(x-y)dy}{x^2+y^2}$.

***Задание* 7 (3 балла)**

Используя поверхностный интеграл первого рода, найти площадь части поверхности $z = 2 - \dfrac{x^2+y^2}{2}$, расположенной над плоскостью xOy.

***Задание* 8 (8 баллов)**

Решить следующие задачи для векторных полей.

8.1 Доказать, что векторное поле $\vec{F}$ потенциально, и найти его потенциал:

$$\vec{F} = (10x-3yz)\,\vec{i} + (10y-3xz)\,\vec{j} + (10z-3xy)\,\vec{k}.$$

8.2 Найти поток Π векторного поля $\vec{F}$ через полную поверхность пирамиды, ограниченной плоскостью α и координатными плоскостями, в направлении внешней нормали к ее поверхности (непосредственно и по формуле Остроградского-Гаусса):

$$\vec{F} = (2x+3y)\,\vec{i} + (2y-3x)\,\vec{j} + (2z+3x)\,\vec{k}, \qquad \alpha:\quad 4x+y+2z=4.$$

8.3 Вычислить циркуляцию $Ц$ векторного поля $\vec{F}$ по замкнутому контуру пересечения плоскости α с координатными плоскостями (непосредственно и по формуле Стокса):

$\vec{F}$ и α - те же, что и в задаче 8.2.

5. Пример решения заданий

***Задание* 1**

Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = z(x, y)$ в замкнутой области D, ограниченной заданными линиями. Результаты решения вынести на область D, построенную в системе координат.

$$z = x^2 - xy + y^2 - 4x + 2y - 5,\; D: x=-2,\; y=-1,\; x+y=3.$$

Решение

1. *Описание теоретического решения задачи*

Существование решения поставленной задачи гарантируется одним из свойств непрерывных функций: если ФНП является непрерывной на замкнутой области, то она достигает своих наибольшего и наименьшего значений на этой области.

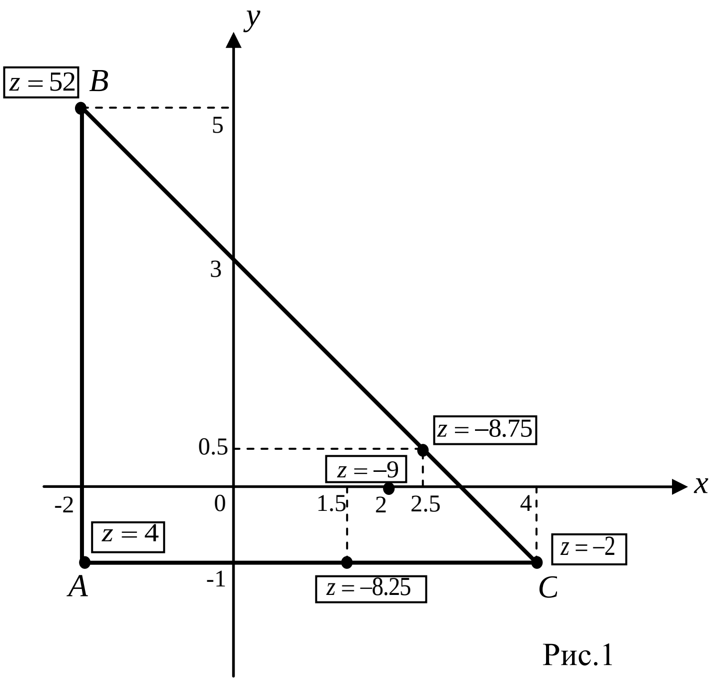
Данная функция двух переменных $z(x, y)$ является непрерывной в замкнутой области, поэтому ее наибольшее и наименьшее значения в этой области существуют:

$$z_{\substack{наиб. \\ D}} = \max\{ z / z = z(x, y), (x, y) \in D\},$$

$$z_{\substack{наим. \\ D}} = \min\{ z / z = z(x, y), (x, y) \in D\}.$$

Эти значения называют глобальными экстремумами функции $z(x, y)$ в области *D*, они могут достигаться либо в точках локальных экстремумов, лежащих внутри области *D*, либо на границе области *D*.

Для наглядности процесса практического решения задачи нужно построить область *D* в системе координат и отмечать в ее точках значения функции *z*, которые далее будут вычисляться (рис.1).



$A(-2;-1)$, $B(-2;5)$, $C(4;-1)$

уравнение *AB*: $x = -2$

уравнение *AC*: $y = -1$

уравнение *BC*: $x + y = 3$

Рис.1

2. *Нахождение локальных экстремумов функции* z(*x*,*y*) *внутри области D*

Используем необходимые и достаточные условия для точки локального экстремума ФНП $z = z(x, y)$.

Необходимые условия экстремума: $\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z'_x = 2x - y - 4 = 0 \\ z'_y = -x + 2y + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} y = 2x - 4 \\ -x + 4x - 8 + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 6 \\ y = 2x - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow M(2;0)$ - это стационарная точка (подозрительная на экстремум), она является внутренней точкой для области *D*.

Проверяем достаточное условие экстремума:

$z''_{xx} = 2$, $z''_{xy} = -1$, $z''_{yy} = 2 \Rightarrow A = z''_{xx}(M) = 2$, $B = z''_{xy}(M) = -1$, $C = z''_{yy}(M) = 2 \Rightarrow$

$\Delta = AC - B^2 = 2 \cdot 2 - (-1)^2 = 3 \Rightarrow$ в стационарной точке *M* есть экстремум, так как $\Delta > 0$, причем минимум, так как $A > 0$.

Вычисляем значение функции z в точке минимума:

$$z_{\min} = z(x,y)\Big|_{M(2;0)} = (x^2 - xy + y^2 - 4x + 2y - 5)\Big|_{\substack{x=2\\y=0}} = 4 - 8 - 5 = -9.$$

Выносим это значение z на область D в точку $(2;0)$.

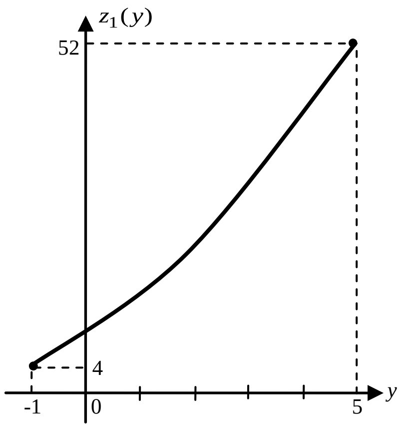
3. *Исследование значений функции z(x,y) на границе области D*

Так как в решаемой задаче граница области D является кусочно-заданной, то нужно исследовать функцию $z(x,y)$ на каждом участке границы в отдельности.

<u>На участке *AB*:</u> $\begin{cases} x = -2 \\ y \in [-1;5] \end{cases} \Rightarrow$

$$z(x,y)\Big|_{AB} = (x^2 - xy + y^2 - 4x + 2y - 5)\Big|_{x=-2} = 4 + 2y + y^2 + 8 + 2y - 5 = y^2 + 4y + 7 \Rightarrow$$

на участке границы функция двух переменных $z(x,y)$ заменилась функцией одной переменной $z_1(y) = y^2 + 4y + 7$, $y \in [-1;5]$; её наибольшее и наименьшее значения на замкнутом промежутке можно найти, построив схематично график функции на этом промежутке:



$z_1(-1) = 1 - 4 + 7 = 4$,

$z_1(5) = 25 + 20 + 7 = 52$;

$z_1'(y) = 2y + 4 \Rightarrow$

$z_1' = 0$ при $y = -2 \notin [-1;5] \Rightarrow z_1(y) \uparrow$;

$z_1(y)_{\text{наиб.}} = 52$ при $y = 5$,

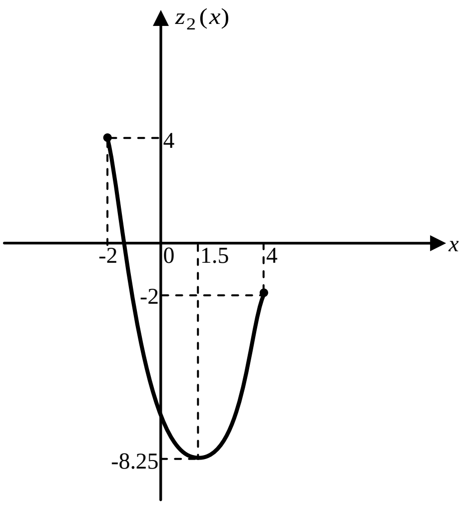
$z_1(y)_{\text{наим.}} = 4$ при $y = -1$.

Переносим результаты исследования функции $z_1(y)$ на функцию $z(x,y)$: на участке AB получим, что $z_{\text{наиб.}} = 52$ - достигается в точке $B(-2;5)$, $z_{\text{наим.}} = 4$ - достигается в точке $A(-2;-1)$; выносим эти значения на чертеж области D.

<u>На участке *AC:*</u> $\begin{cases} y = -1 \\ x \in [-2;-4] \end{cases} \Rightarrow$

$$z(x,y)\Big|_{AC} = (x^2 - xy + y^2 - 4x + 2y - 5)\Big|_{y=-1} = x^2 + x + 1 - 4x - 2 - 5 = x^2 - 3x - 6 \Rightarrow$$

обозначим $z_2(x) = x^2 - 3x - 6$, $x \in [-2;4]$ и построим схематично график этой функции:



$z_2(-2) = 4 + 6 - 6 = 4$,

$z_2(4) = 16 - 12 - 6 = -2$;

$z_2'(x) = 2x - 3 \Rightarrow$

$z_2' = 0$ при $x = 1{,}5 \in [-2;4]$

$\Rightarrow z_2(1{,}5) = 2{,}25 - 4{,}5 - 6 = -8{,}25$;

$z_2(x)_{\text{наиб.}} = 4$ при $x = -2$,

$z_2(x)_{\text{наим.}} = -8{,}25$ при x=1,5.

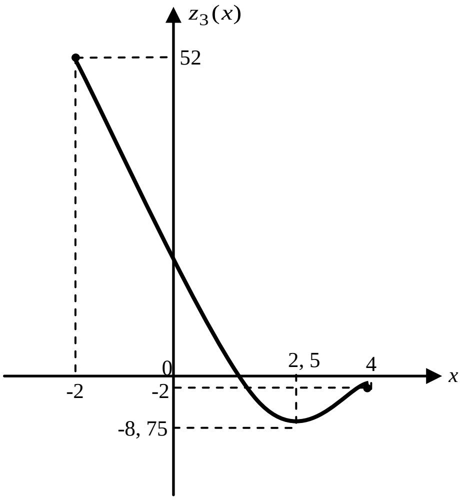
На участке AC получим, что $z_{\text{наиб.}} = 4$ - достигается в точке $A(-2;-1)$, $z_{\text{наим.}} = -8{,}25$ - достигается в точке $(1{,}5;-1)$; выносим эти значения также на чертеж области D.

<u>На участке BC:</u> $x + y = 3 \Rightarrow \begin{cases} y = 3 - x \\ x \in [-2;4] \end{cases} \Rightarrow$

$$z(x,y)\big|_{BC} = (x^2 - xy + y^2 - 4x + 2y - 5)\big|_{y=3-x} = x^2 - x(3-x) + (3-x)^2 - 4x + 2(3-x) - 5 =$$

$= x^2 - 3x + x^2 + 9 - 6x + x^2 - 4x + 6 - 2x - 5 = 3x^2 - 15x + 10 \Rightarrow$ обозначим

$z_3(x) = 3x^2 - 15x + 10$, $x \in [-2;4]$ и построим схематично график этой функции:



$z_3(-2) = 12 + 30 + 10 = 52,$

$z_3(4) = 48 - 60 + 10 = -2;$

$z_3'(x) = 6x - 15 \Rightarrow$

$z_3' = 0$ при $x = 2{,}5 \in [-2;4] \Rightarrow$

$z_3(2{,}5) = 3 \cdot 6{,}25 - 15 \cdot 2{,}5 + 10 =$

$= 18{,}75 - 37{,}5 + 10 = -8{,}75 \Rightarrow$

$z_3(x)_{\text{наиб.}} = 52$ при $x = -2$,

$z_3(x)_{\text{наим.}} = -8{,}75$ при x=2,5.

На участке BC получим, что $z_{\text{наиб.}} = 52$ - достигается в точке $B(-2;5)$, $z_{\text{наим.}} = -8{,}75$ - достигается в точке $(2{,}5;0{,}5)$; выносим эти значения так же на чертеж области D, контролируя при этом в угловых точках A, B, C совпадение значений функции $z(x,y)$, которые получились на разных участках границы области D.

4. *Получение ответа*

Сравнивая между собой все значения функции $z(x,y)$, которые были найдены в решении задачи и вынесены на чертеж области D, выбираем из них наибольшее и наименьшее и составляем ответ.

Ответ: $\underset{D}{z}{}_{\text{наиб.}} = 52$ - достигается в точке $(-2;5)$, $\underset{D}{z}{}_{\text{наим.}} = -9$ - достигается в точке $(2;0)$; область D построена на рис.1.

***Задание* 2**

Дано двумерное скалярное поле $U = U(x,y)$, точка $M_0(x_0;y_0)$ и вектор $\vec{s}$:

$$U = x^2 - 2y, \quad M_0(1;-1), \quad \vec{s} = 2\vec{i} - \vec{j}.$$

Требуется:

1) определить уравнения линий уровня и вектор $\overrightarrow{grad}\,U$, описать смысл этих характеристик скалярного поля; построить несколько линий уровня в системе координат xOy;

2) в точке M_0 найти градиент скалярного поля U, производную $\dfrac{\partial U}{\partial s}$ по заданному направлению $\vec{s}$ и величину скорости наибольшего возрастания функции U;

3) выполнить построение вектора $\overrightarrow{grad}\,U(M_0)$ и линии уровня, проходящей через точку M_0, описать их взаимное расположение; построить вектор $\vec{s}$, сравнить его направление с направлением $\overrightarrow{grad}\,U(M_0)$ и пояснить знак значения $\dfrac{\partial U}{\partial s}$.

Решение

1. Линией уровня скалярного двумерного поля $U(x,y)$ называется линия, в каждой точке которой функция U имеет постоянное значение.

Для данного скалярного поля $U = x^2 - 2y$ уравнения линий уровня имеют вид

$$U(x,y) = \text{const} \;\Rightarrow\; x^2 - 2y = C \;\Leftrightarrow\; \boxed{y = \frac{x^2}{2} - \frac{C}{2}};$$

здесь постоянная C равна значению функции U в точке $(x;y)$, через которую проходит линия уровня. Семейство линий уровня представляет собой множество парабол с вершинами в точках $(0;-\frac{C}{2})$ и ветвями, направленными вверх.

Несколько линий уровня построены на рис.2.

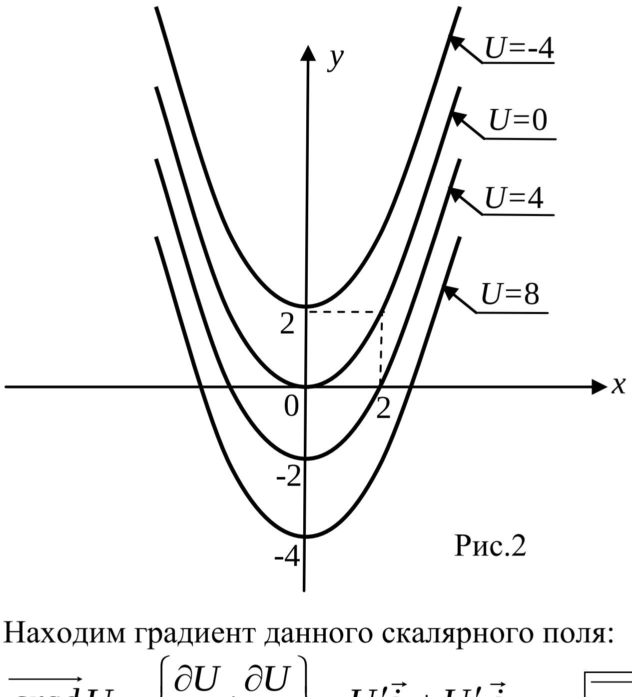


Рис.2

если $C = 0$, то имеем линию уровня $y = \dfrac{x^2}{2}$, на которой $U = 0$;

если $C = 4$, то имеем линию уровня $y = \dfrac{x^2}{2} - 2$, на которой $U = 4$;

если $C = -4$, то имеем линию уровня $y = \dfrac{x^2}{2} + 2$, на которой $U = -4$.

Находим градиент данного скалярного поля:

$$\overrightarrow{grad}\,U = \left\{\frac{\partial U}{\partial x}; \frac{\partial U}{\partial y}\right\} = U'_x\vec{i} + U'_y\vec{j} \;\Rightarrow\; \boxed{\overrightarrow{grad}\,U = 2x\cdot\vec{i} - 2\vec{j}};$$

смысл этого вектора состоит в том, что в каждой точке $(x;y)$ он показывает направление, в котором функция $U(x,y)$ возрастает с наибольшей скоростью.

2. В фиксированной точке $M_0(1;-1)$ вычисляем вектор градиента, производную функции U по заданному направлению $\vec{s}$ и скорость наибольшего возрастания функции $U(x,y)$:

$$\overrightarrow{grad}\,U(M_0) = (2x\vec{i} - 2\vec{j})\Big|_{\substack{x=1\\ y=-1}} = \boxed{2\vec{i} - 2\vec{j}} = \{2;-2\};$$

$$\left.\frac{\partial U}{\partial s}\right|_{M_0} = \left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{M_0} \cdot \cos\alpha + \left.\frac{\partial U}{\partial y}\right|_{M_0} \cdot \cos\beta,$$ где $\{\cos\alpha;\cos\beta\}$ - это орт направления $\vec{s}$;

направляющие косинусы вектора $\vec{s}$ вычисляем по известным формулам геометрии:

$$\cos\alpha = \frac{\text{пр}_x\vec{s}}{|\vec{s}|}, \quad \cos\beta = \frac{\text{пр}_y\vec{s}}{|\vec{s}|}, \quad |\vec{s}| = \sqrt{(s_x)^2 + (s_y)^2} \Rightarrow$$

если $\vec{s} = 2\vec{i} - \vec{j} = \{2;-1\}$, то $|\vec{s}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$, $\cos\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos\beta = \dfrac{-1}{\sqrt{5}}$;

находим значения частных производных в заданной точке и далее искомое значение производной по направлению:

$$\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{M_0} = (x^2 - 2y)'_x\Big|_{M_0} = 2x\Big|_{(1;-1)} = 2, \qquad \left.\frac{\partial U}{\partial y}\right|_{M_0} = (x^2 - 2y)'_y\Big|_{M_0} = -2;$$

$$\left.\frac{\partial U}{\partial s}\right|_{M_0} = 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} + (-2) \cdot \left(\frac{-1}{\sqrt{5}}\right) = \frac{6}{\sqrt{5}} = \frac{6\sqrt{5}}{5} = \boxed{1{,}2\sqrt{5}}$$ - это значение указывает на то, что в точке M_0 в направлении вектора $\vec{s}$ данная функция $U(x,y)$ возрастает со скоростью, величина которой равна $1{,}2\sqrt{5} \approx 2{,}68$.

Скорость наибольшего возрастания функции $U(x,y)$ в той же точке M_0 - это скорость ее изменения в направлении вектора градиента; величина этой скорости равна модулю вектора градиента:

$$\left.\frac{\partial U}{\partial s}\right._{\text{наиб.}} = \left|\overrightarrow{grad}\,U(M_0)\right| = \left|2\vec{i} - 2\vec{j}\right| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = \boxed{2\sqrt{2}} \approx 2{,}83.$$

3. Выполним построение в точке M_0 линии уровня, вектора градиента и вектора $\vec{s}$:

$U(M_0) = (x^2 - 2y)\Big|_{(1;-1)} = 3 \Rightarrow$ уравнение линии уровня: $x^2 - 2y = 3 \Leftrightarrow \boxed{y = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{3}{2}}$;

вектор $\overrightarrow{grad}\,U(M_0) = \{2;-2\}$ откладывается началом в точке M_0 и имеет направление, перпендикулярное к линии уровня, проходящей через точку M_0 (рис.3);

вектор $\vec{s} = \{2;-1\}$, построенный началом в точке M_0, составляет острый угол с вектором $\overrightarrow{grad}\,U(M_0)$, поэтому $\left.\dfrac{\partial U}{\partial s}\right|_{M_0} = np_{\vec{s}}\,\overrightarrow{grad}\,U(M_0)$ имеет положительное значение.

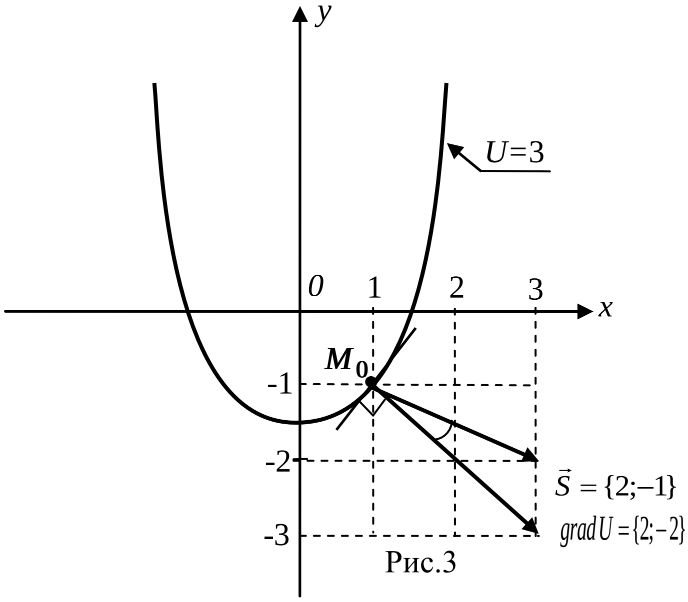


Рис.3

Ответ: 1) линии уровня и градиент: $y=\frac{x^2}{2}-\frac{C}{2}$, $\overrightarrow{grad}\,U=2x\vec{i}-2\vec{j}$;

линии уровня построены на рис.2;

2) в точке M_0: $\overrightarrow{grad}\,U(M_0)=2\vec{i}-2\vec{j}$, $\left.\frac{\partial U}{\partial s}\right|_{M_0}=1{,}2\sqrt{5}\approx 2{,}68$,

величина скорости наибольшего возрастания функции U равна $2\sqrt{2}\approx 2{,}83$;

3) построения в точке M_0 приведены на рис.3.

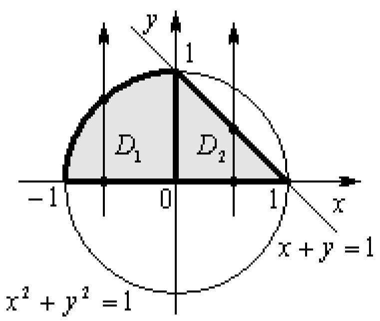
***Задание* 3**

Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)dx$.

Решение

Данный повторный интеграл мог получиться как результат вычисления двойного интеграла от функции $f(x,y)$ по области $D\subset xOy$, записанной системой следующих неравенств: $\begin{cases}0\le y\le 1\\ -\sqrt{1-y^2}\le x\le 1-y\end{cases}$.

Поэтому для решения задачи нужно построить область D, записать ее неравенствами другим способом (т.е. первое неравенство должно быть по x в постоянных пределах, а второе – по переменной y в пределах, зависящих от x). Затем двойной интеграл вновь свести к повторному интегралу в соответствии с другой системой неравенств. Этими действиями и изменится порядок интегрирования в данном повторном интеграле.



$y=0$ - нижняя граница области D,

$y=1$- верхняя граница,

$x=-\sqrt{1-y^2}\Rightarrow x^2+y^2=1$ - левая граница,

$x=1-y\Rightarrow x+y=1$- правая граница;

$D=D_1\cup D_2$;

$$D_1:\begin{cases}-1\le x\le 0\\ 0\le y\le\sqrt{1-x^2}\end{cases}\qquad D_2:\begin{cases}0\le x\le 1\\ 0\le y\le 1-x\end{cases}$$

Переходим от данного повторного интеграла к двойному интегралу, используем свойство аддитивности двойного интеграла в соответствии с представлением $D=D_1\cup D_2$, далее двойные интегралы по областям D_1 и D_2 сводим к повторным интегралам в соответствии с системами неравенств, составленными для этих областей:

$$I=\int\limits_0^1 dy\int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)dx=\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy+\iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy=$$

$$=\int\limits_{-1}^0 dx\int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy+\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{1-x} f(x,y)dy$$

Ответ: $I=\int\limits_{-1}^0 dx\int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy+\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{1-x} f(x,y)dy$.

***Задание* 4**

Используя двойной интеграл, вычислить указанные величины.

4.1 Площадь плоской фигуры, ограниченной линиями $x^2+y^2=2y$, $y^2-2y+\frac{1}{2}x=0$.

4.2 Объем тела, ограниченного поверхностями $x^2+y^2=z-1$, $x^2+y^2=-3z+7$.

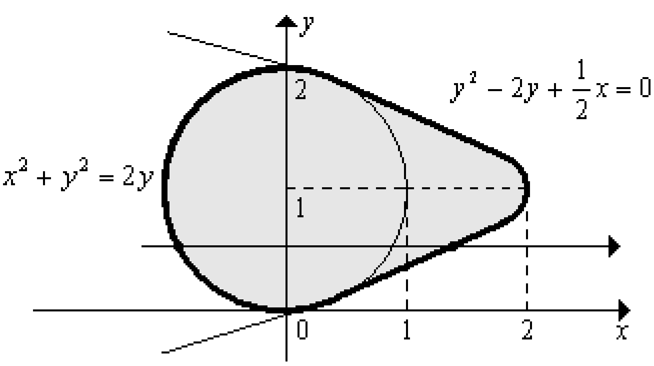
4.3 Момент инерции относительно начала координат плоской фигуры, ограниченной линиями $x^2+y^2=2x$, $x^2+y^2=9$, $x=0$, $y=0$ ($x\ge 0$, $y\ge 0$), если поверхностная плотность в точке с координатами (x; y) равна ординате этой точки.

Решение

***Задача* 4.1**

Записываем условие задачи в краткой форме:

D: $x^2+y^2=2y$, $y^2-2y+\frac{1}{2}x=0$; $S_D-?$



Строим область D, ограниченную данными линиями:

1) $x^2+y^2=2y\Leftrightarrow$

$x^2+(y-1)^2=1$ – окружность с центром в т. (0; 1) и $R=1$;

2) $y^2-2y+\frac{1}{2}x=0\Leftrightarrow$

$(y-1)^2=-\frac{1}{2}(x-2)$ – парабола с вершиной в точке $(2;1)$, имеет горизонтальную ось симметрии, проходит через точки $(0;0)$ и $(0;2)$.

Площадь фигуры, занимающей область D, с помощью двойного интеграла вычисляется по следующей теоретической формуле:

$$\boxed{S_D = \iint\limits_D dS}$$

Записываем область D системой неравенств: $\begin{cases} 0 \le y \le 2 \\ -\sqrt{2y-y^2} \le x \le 4y-2y^2 \end{cases}$;

сводим двойной интеграл к повторному интегралу и вычисляем его:

$$\iint\limits_D dS = \iint\limits_D dxdy = \int\limits_0^2 dy \int\limits_{-\sqrt{2y-y2}}^{4y-2y^2} dx = \int\limits_0^2 dy\cdot x \Big|_{-\sqrt{2y-y2}}^{4y-2y^2} = \int\limits_0^2 dy(4y-2y^2+\sqrt{2y-y^2}) =$$

$$= 2y^2\Big|_0^2 - \frac{2}{3}y^3\Big|_0^2 + \int\limits_0^2 \sqrt{1-(y-1)^2}dy = \left\{ \begin{array}{l} \textit{замена} \\ y = 1+\sin t \Rightarrow dy = \cos t dt \\ \sqrt{1-(y-1)^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = \cos t \\ \begin{array}{c|c} y & t = \arcsin(y-1) \\ \hline 0 & -\frac{\pi}{2} \\ 2 & \frac{\pi}{2} \end{array} \end{array} \right\} = 8 - \frac{16}{3} + \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \cdot dt =$$

$$= \frac{8}{3} + \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(1+\cos 2t)dt = \frac{8}{3} + \frac{1}{2}(t+\frac{1}{2}\sin 2t)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{8}{3}+\frac{1}{2}\pi = \frac{16+3\pi}{6} \approx 4,24.$$

Ответ к задаче* 4.1*: $S_D = \dfrac{16+3\pi}{6} \approx 4,24$ (ед. площади).

***Задача* 4.2**

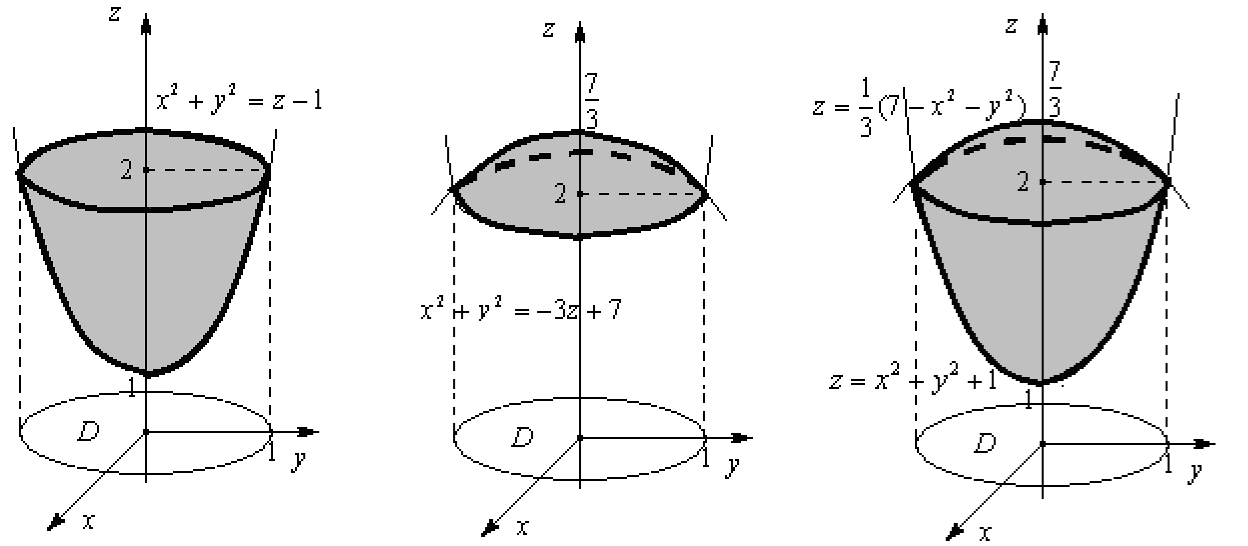
Записываем условие задачи в краткой форме:

(V): $x^2+y^2 = z-1$, $x^2+y^2 = -3z+7$; $V-?$

Данное тело ограничено двумя параболоидами. Решая систему их уравнений

$\begin{cases} x^2+y^2 = z-1 \\ x^2+y^2 = -3z+7 \end{cases}$, находим уравнение линии пересечения параболоидов $\begin{cases} x^2+y^2 = 1 \\ z = 2. \end{cases}$

Строим каждую поверхность в отдельности, а затем выделяем объем, получающийся пересечением построенных поверхностей:



Искомый объем равен разности объемов двух цилиндроидов с одним основанием (круг $x^2+y^2\le 1$) и ограниченных сверху соответственно поверхностями $z=\frac{1}{3}(7-x^2-y^2)$ и $z=x^2+y^2+1$. Поэтому можно использовать теоретическую формулу для вычисления объема цилиндроида

$$\boxed{V=\iint\limits_D z(x,y)dS.}$$

Тогда расчётная формула для вычисления искомого объема имеет вид:

$$\boxed{V=V_1-V_2=\iint\limits_D \frac{1}{3}(7-x^2-y^2)dS-\iint\limits_D (x^2+y^2+1)dS}.$$

Для вычисления составленных двойных интегралов область D удобно записать неравенствами в полярных координатах: $\begin{cases}0\le\varphi\le 2\pi\\ 0\le\rho\le 1\end{cases}$ и учесть, что $\begin{cases}x=\rho\cos\varphi\\ y=\rho\sin\varphi\\ dS=\rho\cdot d\rho\cdot d\varphi\end{cases}$.

Переходя к полярным координатам в двойных интегралах, находим, что

$$V=\frac{1}{3}\iint\limits_D(7-\rho^2)\rho\,d\rho\,d\varphi-\iint\limits_D(1+\rho^2)\rho\,d\rho\,d\varphi=\frac{1}{3}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1(7\rho-\rho^3)d\rho-\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1(\rho+\rho^3)d\rho=$$

$$=\frac{1}{3}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\left(\frac{7}{2}\rho^2-\frac{1}{4}\rho^4\right)\Big|_0^1-\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\left(\frac{1}{2}\rho^2+\frac{1}{4}\rho^4\right)\Big|_0^1=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{7}{2}-\frac{1}{4}\right)\cdot\varphi\Big|_0^{2\pi}-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)\cdot\varphi\Big|_0^{2\pi}=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{13}{4}\cdot 2\pi-\frac{3}{4}\cdot 2\pi=\frac{2}{3}\pi\approx 2{,}1.$$

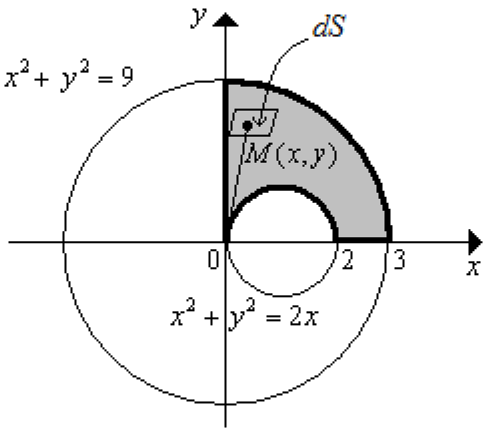
***Ответ к задаче* 4.2:** $V=\frac{2}{3}\pi\approx 2{,}1$ (ед.объема).

***Задача* 4.3**

Записываем условие задачи в краткой форме:

D: $x^2+y^2=2x$, $x^2+y^2=9$, $x=0$, $y=0$, $(x\ge 0,\ y\ge 0)$; $\gamma(x,y)=y$; $I_0-?$

Расчетную формулу для искомой величины составим подробно, используя общую методику приложений интегрального исчисления.



Разбиваем мысленно данную фигуру на малые элементарные части и записываем бесконечно малый элемент искомого момента инерции I_0, заменяя элементарную площадку материальной точкой $M(x,y)$ с массой dm:

$$dI_0=|OM|^2\,dm=(x^2+y^2)dm.$$

Если пренебречь изменением поверхностной плотности материала в пределах элементарной площадки, то $dm=\gamma(M)\cdot dS=y\cdot dS,$ где dS - это площадь элементарной части.

Тогда $dI_0=(x^2+y^2)\cdot y\cdot dS\Rightarrow \boxed{I_0=\iint\limits_D dI_0=\iint\limits_D (x^2+y^2)\cdot y\cdot dS}$

Это и есть расчетная формула для вычисления искомого момента инерции.

Вычисление записанного двойного интеграла удобно провести в полярной системе координат, в которой $D:\begin{cases}0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2}\\ 2\cos\varphi\le\rho\le 3\end{cases}$ и $\begin{cases}x=\rho\cdot\cos\varphi\\ y=\rho\cdot\sin\varphi\\ dS=\rho\cdot d\rho\cdot d\varphi\end{cases}\Rightarrow\ x^2+y^2=\rho^2.$

Тогда $I_0=\iint\limits_D\rho^2\rho\sin\varphi\cdot\rho\cdot d\rho\cdot d\varphi=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\sin\varphi\int\limits_{2\cos\varphi}^{3}\rho^4 d\rho=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\sin\varphi\frac{1}{5}\rho^5\Big|_{2\cos\varphi}^{3}=$

$$=\frac{1}{5}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\sin\varphi\left(243-32\cos^5\varphi\right)=-\frac{1}{5}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(243-32\cos^5\varphi\right)d\left(\cos\varphi\right)=$$

$$=-\frac{1}{5}(243\cos\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{32}{6}\cos^6\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}})=-\frac{1}{5}(-243+\frac{32}{6})=\frac{713}{15}\approx 47{,}5.$$

***Ответ к задаче* 4.3:** $I_0=\dfrac{713}{15}\approx 47{,}5$ (ед. момента инерции).

***Задание* 5**

Используя тройной интеграл, вычислить указанные величины.

5.1 Объем тела, ограниченного поверхностями $(az)^2=x^2+y^2$, $x^2+y^2+z^2=a^2+1$, $(z\ge 0)$.

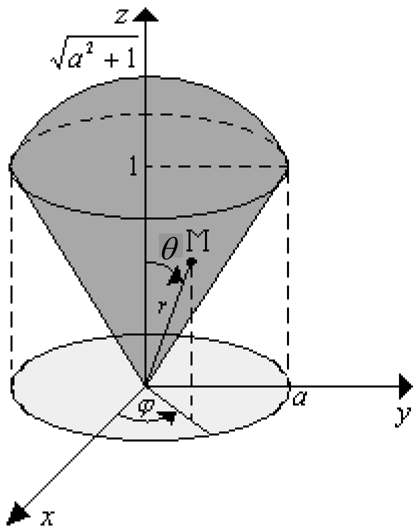
5.2 Массу тела, ограниченного поверхностями $2x+z=2a$, $x+z=a$, $y^2=ax$, $y=0$ ($y \ge 0$), если плотность в каждой его точке равна произведению абсциссы и ординаты этой точки.

Решение

***Задача* 5.1**

Условие задачи в краткой форме:

(V): $(az)^2 = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + 1, (z \ge 0)$, $V - ?$



Определим вид каждой поверхности:

$(az)^2 = x^2 + y^2$ - это уравнение конуса,

$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + 1$ - это уравнение сферы радиуса

$R = \sqrt{a^2+1}$ с центром в начале координат.

Строим искомый объем пересечением данных поверхностей и записываем теоретическую формулу для его вычисления с помощью тройного интеграла: $\boxed{V = \iiint\limits_{(V)} dV}$.

Проще всего вычислить тройной интеграл по такому объему в сферических координатах, в которых объем *(V)* записывается следующей системой неравенств:

$$(V): \begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le r \le \sqrt{a^2+1} \\ 0 \le \theta \le arctga \end{cases}$$

Переводим тройной интеграл к сферическим координатам, учитывая что

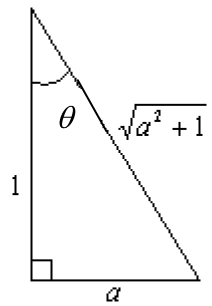
$dV = r^2 \sin\theta \cdot d\varphi \cdot dr \cdot d\theta$, и вычисляем его сведением к повторному интегралу:

$$V = \iiint\limits_{(V)} r^2 \sin\theta \cdot d\varphi \cdot dr \cdot d\theta = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{a^2+1}} r^2 dr \int\limits_0^{arctga} \sin\theta d\theta = \varphi \Big|_0^{2\pi} \cdot \frac{r^3}{3}\Big|_0^{\sqrt{a^2+1}} (-\cos\theta) \Big|_0^{arctga} =$$

$$= 2\pi \frac{1}{3}\left(\sqrt{a^2+1}\right)^3 (-\cos(arctga)+1) = \frac{2}{3}\pi(a^2+1)\sqrt{a^2+1}\left(-\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}+1\right) =$$

$$= \frac{2}{3}\pi(a^2+1)\left(\sqrt{a^2+1}-1\right).$$

Замечания к решению



1) в упрощении выражения $\cos(arctga)$ использовался прямоугольный треугольник, в котором

$$\theta = arctga \Rightarrow tg\theta = a \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{a^2+1}};$$

2) в вычислении трехкратного повторного интеграла использовано то, что каждый внутренний интеграл вычисляется от такой функции и в таких пределах, которые не зависят от переменных внешних интегралов. Поэтому повторный интеграл в таком случае равен просто произведению интегралов.

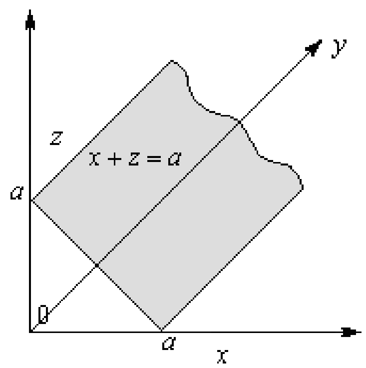
Ответ к задаче* 5.1*: $V = \frac{2}{3}\pi(a^2+1)(\sqrt{a^2+1}-1)$ (ед. объема).

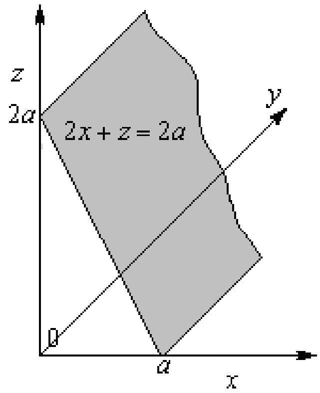
***Задача* 5.2**

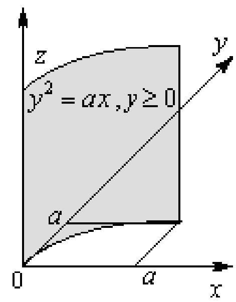
Условие задачи в краткой форме:

(*V*): $2x + z = 2a$, $x + z = a$, $y^2 = ax$, $y = 0, (y \geq 0)$; $\gamma(x, y, z) = x \cdot y$; $m - ?$

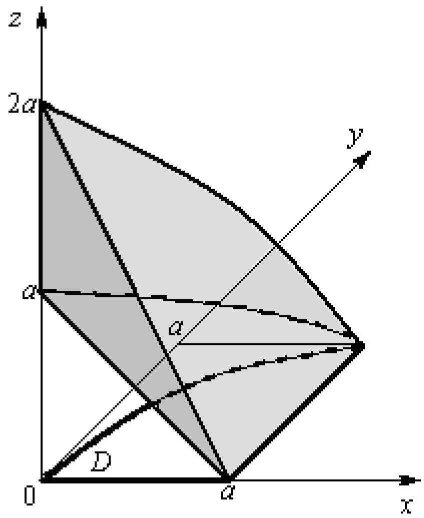
Для построения тела в системе координат *xOyz* здесь полезно нарисовать геометрический образ каждого данного уравнения отдельно (считая, что $a > 0$):

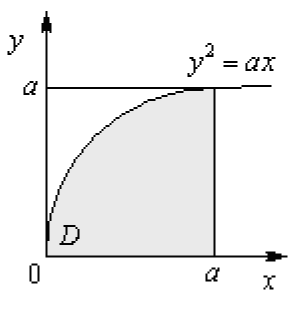






Тогда тело, массу которого нужно найти, и его проекция на плоскость *xOy* (область *D*) имеют следующую форму:





Теоретическую формулу для вычисления массы неоднородного тела можно записать на основании механической трактовки тройного интеграла:

$$\boxed{m=\iiint\limits_{(V)}\gamma(x,y,z)dV},$$

где $\gamma(x,y,z)-$это объемная плотность неоднородного материала.
По условию данной задачи $\gamma(x,y,z)=x\cdot y$, поэтому искомую массу нужно находить по следующей расчетной формуле: $\boxed{m=\iiint\limits_{(V)}x\cdot y\cdot dV}$.

Будем вычислять составленный тройной интеграл в декартовых координатах, записав область интегрирования следующими системами неравенств:

$$(V):\begin{cases}(x,y)\in D\\ a-x\le z\le 2a-2x\end{cases}\qquad D:\begin{cases}0\le x\le a\\ 0\le y\le\sqrt{ax}\end{cases}.$$

Тогда $m=\iint\limits_D dxdy\int\limits_{a-x}^{2a-2x}xy\cdot dz=\iint\limits_D dxdy\cdot xy\cdot z\Big|_{z=a-x}^{z=2a-2x}=\iint\limits_D xy(a-x)dxdy=$

$$=\int\limits_{x=0}^{a}dx\int\limits_{y=0}^{\sqrt{ax}}x(a-x)ydy=\int\limits_0^a dx\cdot x(a-x)\cdot\frac{y^2}{2}\Bigg|_{y=0}^{y=\sqrt{ax}}=\frac{1}{2}\int\limits_0^a x(a-x)\cdot ax\cdot dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^a\left(a^2x^2-ax^3\right)dx=\frac{1}{2}\left(a^2\frac{x^3}{3}-a\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_o^a=\frac{1}{2}\left(\frac{a^5}{3}-\frac{a^5}{4}\right)=\frac{1}{24}a^5.$$

***Ответ к задаче* 5.2:** $m=\dfrac{1}{24}a^5$ (ед. массы).

***Задание* 6**

Используя криволинейные интегралы, определить указанные величины.

6.1 Работу, производимую силой $\vec{F}=\left\{y;-y-x^2\right\}$ при перемещении точечной массы $m=1$ вдоль дуги линии $y=2x-x^2$, расположенной над осью Ox и пробегаемой по ходу часовой стрелки.

6.2 Массу окружности $x^2+y^2=ax$, если линейная плотность материала в точке $(x;\,y)$ равна расстоянию от этой точки до начала координат.

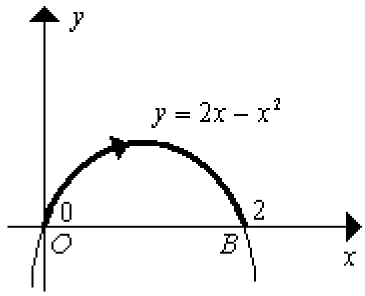
6.3 Функцию $U(x,y)$ по ее полному дифференциалу $dU=\dfrac{(x+y)dx-(x-y)dy}{x^2+y^2}$.

Решение

***Задача* 6.1**

Условие задачи в краткой форме:

$\vec{F}=\left\{y;-y-x^2\right\}$, $(l):y=2x-x^2$ над осью Ox по часовой стрелке; $A-?$



По физическому смыслу криволинейного интеграла второго рода, работа A переменной силы $\vec{F}=\{P(x,y);Q(x,y)\}$ на направленном криволинейном перемещении (l) вычисляется как криволинейный интеграл второго рода от скалярного произведения вектора силы $\vec{F}$ на вектор бесконечно малого перемещения $\vec{dl}=\{dx;\ dy\}$ по теоретической формуле

$$A=\int\limits_{(l)}\vec{F}\cdot\vec{dl}=\int\limits_{(l)}P(x,y)dx+Q(x,y)dy\,.$$

В данной задаче $P(x,y)=y$, $Q(x,y)=-y-x^2$, $(l)=(OB)$, поэтому искомая работа находится по следующей расчетной формуле:

$$\boxed{A=\int\limits_{(OB)}ydx+(-y-x^2)dy}$$

Сводим составленный криволинейный интеграл к определенному интегралу, записав уравнение линии OB: $y=2x-x^2$ и взяв x независимой переменной (параметром), тогда

$$x_{нач.}=x_0=0,\quad x_{кон.}=x_B=2,\quad dy=y'_x\cdot dx=(2x-x^2)'\cdot dx=(2-2x)dx\,.$$

В результате получим:

$$A=\int\limits_0^2((2x-x^2)dx+(-2x+x^2-x^2)(2-2x)dx)=\int\limits_0^2(3x^2-2x)dx=(x^3-x^2)\Big|_0^2=8-4=4\,.$$

Ответ к задаче* 6.1*: $A=4$ (ед. работы).

***Задача* 6.2**

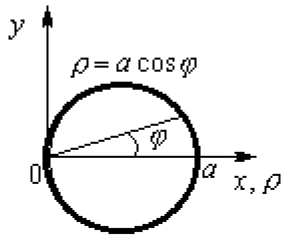
Условие задачи в краткой форме:

$(l): x^2+y^2=ax$, $\gamma(x,y)$ – расстояние от точки $(x;\,y)$ до $(0;0)$; m – ?

Составим расчетную формулу для искомой массы линии, используя общую методику приложения интегрального исчисления. Если данную линию разбить на элементарные части (малые дуги) и считать приближенно каждую часть однородной, то бесконечно малый элемент массы будет равен

$dm=\gamma(x,y)\cdot dl$, где $\gamma(x,y)$ - это линейная плотность распределения массы.

По условию задачи составляем формулу для плотности в точке $(x;y)$: $\gamma(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$.



Тогда $dm=\sqrt{x^2+y^2}\cdot dl\Rightarrow\boxed{m=\int\limits_{(l)}\sqrt{x^2+y^2}dl}$, где (l) - это окружность $x^2+y^2=ax$.

Теперь будем вычислять составленный криволинейный интеграл первого рода по окружности, уравнение которой проще записать в полярных координатах, учитывая что $x=\rho\cdot\cos\varphi,\ y=\rho\cdot\sin\varphi$:

$$x^2+y^2=ax \Leftrightarrow \rho=a\cos\varphi .$$

Вычисление криволинейного интеграла первого рода сводится к вычислению определенного интеграла по некоторой независимой переменной (параметру), через которую выражаются переменные x, y и дифференциал длины дуги dl. Выберем такой независимой переменной полярный угол φ, изменяющийся на линии (l) в пределах от значения $-\frac{\pi}{2}$ до значения $+\frac{\pi}{2}$, и выразим через φ подынтегральное выражение:

$$x^2+y^2=\rho^2 \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2}=\rho, \quad dl=\sqrt{\rho^2+\left(\rho'_\varphi\right)^2}\,d\varphi;$$

так как на линии (l) $\rho(\varphi)=a\cos\varphi$, то $dl=\sqrt{a^2\cos^2\varphi+\left(-a\sin\varphi\right)^2}\,d\varphi=a\cdot d\varphi$ (использована формула для дифференциала длины дуги в полярных координатах).

Тогда

$$\int\limits_{(l)}\sqrt{x^2+y^2}\,dl=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\rho(\varphi)\cdot a\cdot d\varphi=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}a\cos\varphi\cdot a\cdot d\varphi=a^2\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\cdot d\varphi=a^2\sin\varphi\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=2a^2 .$$

***Ответ к задаче* 6.2:** $2a^2$ (ед. массы).

***Задача* 6.3**

Условие задачи в краткой форме:

$$dU=\frac{(x+y)dx-(x-y)dy}{x^2+y^2}, \quad U(x,y)-?$$

Проверяем необходимое и достаточное условие полного дифференциала функции двух переменных:

$$P(x,y)\cdot dx+Q(x,y)\cdot dy=dU(x,y) \;\Leftrightarrow\; \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

В данной задаче:

$$P(x,y)=\frac{x+y}{x^2+y^2} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{(x^2+y^2)-(x+y)2y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^2-y^2-2xy}{(x^2+y^2)^2},$$

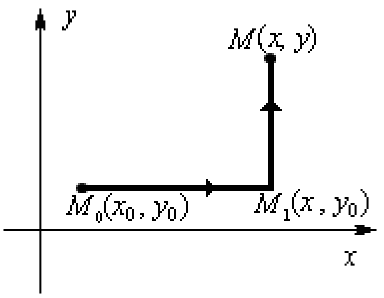
$$Q(x,y)=\frac{-(x-y)}{x^2+y^2} \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{-(x^2+y^2)+(x-y)2x}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^2-y^2-2xy}{(x^2+y^2)^2} \Rightarrow$$

условие полного дифференциала выполнено, следовательно, задача поставлена корректно, то есть восстановить функцию $U(x,y)$ можно.

Для нахождения функции $U(x,y)$ используем криволинейный интеграл II рода, вычислив его от полного дифференциала dU по линии (M_0M), соединяющей фиксированную точку $M_0(x_0,y_0)$ и переменную точку $M(x,y)$ в области существования криволинейного интеграла. В результате получается следующая теоретическая формула:

$$\boxed{\int\limits_{(M_0M)}dU(x,y)=U(M)-U(M_0)=U(x,y)-U(x_0,y_0)}$$

Так как криволинейный интеграл от полного дифференциала некоторой функции не зависит от формы линии интегрирования, то будем вычислять его по ломаной линии $\left(M_0M_1M\right)$, состоящей из отрезков, параллельных осям координат.



Запишем уравнения каждого звена ломаной линии и, используя свойство аддитивности криволинейного интеграла, будем сводить его вычисление к вычислению определенных интегралов:

уравнение $\left(M_0M_1\right)$:

$y = y_0 = const \;\;\Rightarrow\;\; dy = 0$, x – независимая переменная, $x_{нач} = x_0$, $x_{кон} = x$;

уравнение $\left(M_1M\right)$:

$x = x = const \;\;\Rightarrow\;\; dx = 0$, y – независимая переменная, $y_{нач} = y_0$, $y_{кон} = y_0$;

$$U(x,y) - U(x_0,y_0) = \int\limits_{(M_0M_1M)} \frac{(x+y)dx - (x-y)dy}{x^2+y^2} = \int\limits_{(M_0M_1)} + \int\limits_{(M_1M)} =$$

$$= \int\limits_{x=x_0}^{x} \frac{(x+y_0)dx}{x^2+y_0^2} + \int\limits_{y=y_0}^{y} \frac{-(x-y)dy}{x^2+y^2} = \int\limits_{x_0}^{x} \frac{xdx}{x^2+y_0^2} + y_0 \int\limits_{x_0}^{x} \frac{dx}{x^2+y_0^2} - x \int\limits_{y_0}^{y} \frac{dy}{y^2+x^2} + \int\limits_{y_0}^{y} \frac{ydy}{y^2+x^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|x^2+y_0^2\right|\Big|_{x=x_0}^{x} + y_0 \frac{1}{y_0} arctg \frac{x}{y_0}\Big|_{x=x_0}^{x} - x\frac{1}{x} arctg\frac{y}{x}\Big|_{y=y_0}^{y} + \frac{1}{2}\ln\left|y^2+x^2\right|\Big|_{y=y_0}^{y} =$$

$$= \cancel{\frac{1}{2}\ln(x^2+y_0^2)} - \frac{1}{2}\ln(x_0^2+y_0^2) + arctg\frac{x}{y_0} - arctg\frac{x_0}{y_0} - arctg\frac{y}{x} + arctg\frac{y_0}{x} +$$

$$+ \frac{1}{2}\ln(y^2+x^2) - \cancel{\frac{1}{2}\ln(x^2+y_0^2)} =$$

$$= \left\{ \text{так как известно, что } \operatorname{arctg}\alpha + \operatorname{arctg}\frac{1}{\alpha} = \frac{\pi}{2}, \text{ то } arctg\frac{x}{y_0} + arctg\frac{y_0}{x} = \frac{\pi}{2} \text{ и } arctg\frac{x_0}{y_0} = \frac{\pi}{2} - arctg\frac{y_0}{x_0} \right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(y^2+x^2) - arctg\frac{y}{x} - \frac{1}{2}\ln(x_0^2+y_0^2) + \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - arctg\frac{y_0}{x_0}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) - arctg\frac{y}{x} - \left(\frac{1}{2}\ln(x_0^2+y_0^2) - arctg\frac{y_0}{x_0}\right) = U(x,y) - U(x_0,y_0).$$

Таким образом, искомая функция получилась в следующем виде:

$$U(x,y)=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)-arctg\,\frac{y}{x}.$$

Проверка:

$$dU=U'_x\,dx+U'_y\,dy.$$

$$U'_x=\left(\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)-arctg\,\frac{y}{x}\right)'_x=\frac{1}{2}\frac{1}{x^2+y^2}2x-\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)=\frac{x}{x^2+y^2}+\frac{y}{x^2+y^2}=\frac{x+y}{x^2+y^2};$$

$$U'_y=\left(\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)-arctg\,\frac{y}{x}\right)'_y=\frac{1}{2}\frac{1}{x^2+y^2}2y-\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\cdot\frac{1}{x}=\frac{y}{x^2+y^2}-\frac{x}{x^2+y^2}=\frac{y-x}{x^2+y^2}$$

$$dU=\frac{x+y}{x^2+y^2}dx+\frac{y-x}{x^2+y^2}dy=\frac{(x+y)dx-(x-y)dy}{x^2+y^2}$$

вычисленный полный дифференциал dU совпадает с данным в условии задачи, следовательно, функция $U(x,y)$ восстановлена верно.

В записи ответа учтем, что функция нескольких переменных восстанавливается по её полному дифференциалу с точностью до постоянного слагаемого.

Замечание

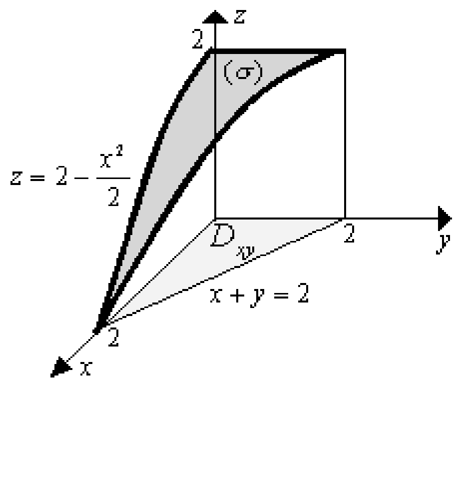
При решении этой задачи фиксированную точку $M_0(x_0,y_0)$ можно выбрать с числовыми координатами, но так, чтобы выполнялось достаточное условие существования криволинейного интеграла на всей линии интегрирования. Например, в рассматриваемой задаче можно было взять $M_0(1;0)$, но нельзя (0;0). Тем самым упростились бы вычисления, но перестала бы быть понятной их суть.

Ответ к задаче* 6.3*: $U(x,y)=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)-arctg\,\frac{y}{x}+C.$

***Задание* 7**

Используя поверхностный интеграл первого рода, найти площадь части поверхности $z=2-\frac{x^2+y^2}{2}$, расположенной над плоскостью XOY.

Решение



Из теории известно, что площадь поверхности вычисляется поверхностным интегралом 1-го рода:

$$\boxed{S_{(\sigma)}=\iint\limits_{(\sigma)}d\sigma}.$$

Вычисление поверхностного интеграла сводится к вычислению двойного интеграла по проекции поверхности (σ) на одну из координатных плоскостей, например, на плоскость xOy:

$$\boxed{\iint\limits_{(\sigma)} d\sigma = \iint\limits_{D_{xy}} \sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\,dxdy}$$

где функцией $z = z(x, y)$ задаётся уравнение поверхности (σ).

Для данной поверхности имеем: $z = 2 - \dfrac{x^2}{2} \Rightarrow \quad z'_x = -x,\ z'_y = 0$, поэтому

$$\sqrt{1+\left(z'_x\right)^2+\left(z'_y\right)^2} = \sqrt{1+x^2} \Rightarrow$$

$$S_{(\sigma)} = \iint\limits_{D_{xy}} \sqrt{1+x^2}\,dxdy = \int_0^2 dx\sqrt{1+x^2}\int_0^{2-x} dy = \int_0^2 dx\sqrt{1+x^2}(2-x) = 2\int_0^2 \sqrt{1+x^2}\,dx - \frac{1}{2}\int_0^2 \sqrt{1+x^2}\,d(1+x^2) =$$

$$= 2\left(\frac{x}{2}\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2}\ln(x+\sqrt{1+x^2})\right)\Bigg|_0^2 - \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^2 = 2\sqrt{5} + \ln(2+\sqrt{5}) - \frac{1}{3}(5^{\frac{3}{2}} - 1) =$$

$$= \frac{1}{3}(\sqrt{5}+1) + \ln(2+\sqrt{5}) \approx 1{,}079 + 1{,}444 = 2{,}523 \approx 2{,}52.$$

Ответ: $S_{(\sigma)} = \dfrac{1}{3}(\sqrt{5}+1) + \ln(2+\sqrt{5}) \approx 2{,}52$ (ед. площади).

Задание 8

Решить следующие задачи для векторных полей.

8.1 Доказать, что векторное поле $\vec{F}$ потенциально, и найти его потенциал,
если $\vec{F} = (10x - 3yz)\,\vec{i} + (10y - 3xz)\,\vec{j} + (10z - 3xy)\,\vec{k}$.

8.2 Найти поток Π векторного поля $\vec{F}$ через полную поверхность пирамиды, ограниченной плоскостью α и координатными плоскостями, в направлении внешней нормали к ее поверхности (непосредственно и по формуле Остроградского-Гаусса):

$\vec{F} = (2x+3y)\,\vec{i} + (2y-3x)\,\vec{j} + (2z+3x)\,\vec{k}$, $\qquad \alpha:\ 4x + y + 2z = 4$.

8.3 Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{F}$ по замкнутому контуру пересечения плоскости α с координатными плоскостями (непосредственно и по формуле Стокса):
$\vec{F}$ и α - те же, что и в задаче 8.2.

Решение

***Задача* 8.1**

Условие задачи в краткой форме:

$\vec{F} = (10x - 3yz)\,\vec{i} + (10y - 3xz)\,\vec{j} + (10z - 3xy)\,\vec{k}$; найти потенциал векторного поля $\vec{F}$.

По определению, векторное поле $\vec{F}(M)$, где $M(x,y,z)\in D\subset\mathbb{R}^3$, называется потенциальным, если оно является градиентом некоторого скалярного поля $U(M)$, т.е.

$$\boxed{\vec{F}=\overrightarrow{grad}\,U=\vec{\nabla}U}$$

где $\vec{\nabla}=\left\{\frac{\partial}{\partial x};\ \frac{\partial}{\partial y};\ \frac{\partial}{\partial z}\right\}$ – векторный дифференциальный оператор «набла» (оператор Гамильтона).

При этом функция $U(x,y,z)$ называется потенциалом векторного поля $\vec{F}(M)$.

Необходимым и достаточным условием потенциальности поля $\vec{F}(M)$, заданного в пределах односвязной области, является равенство нулю его ротора: $\boxed{rot\,\vec{F}=\vec{0}}$.

Поэтому для проверки потенциальности данного поля вычислим его ротор:

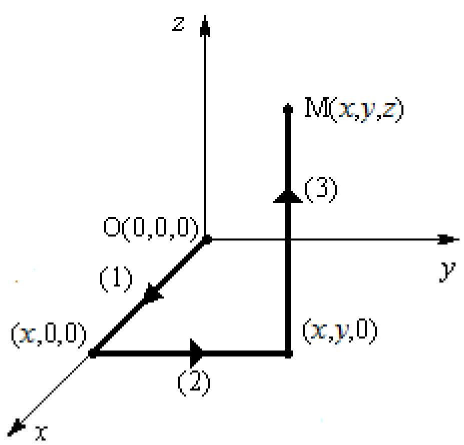
$$rot\vec{F}=\vec{\nabla}\times\vec{F}=\left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)\times(F_x\vec{i}+F_y\vec{j}+F_z\vec{k})=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ F_x & F_y & F_z\end{vmatrix}=$$

$$=\vec{i}\left(\frac{\partial F_z}{\partial y}-\frac{\partial F_y}{\partial z}\right)-\vec{j}\left(\frac{\partial F_z}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial z}\right)+\vec{k}\left(\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}\right);$$

для данного поля $\vec{F}$ его проекции равны: $F_x=10x-3yz$, $F_y=10y-3xz$, $F_z=10z-3xy$,

поэтому $rot\,\vec{F}=\vec{i}(-3x+3x)-\vec{j}(-3y+3y)+\vec{k}(-3z+3z)=\vec{0}$,

следовательно, данное векторное поле является потенциальным.



Для нахождения потенциала $U(x,y,z)$ учитываем, что $\vec{F}=\overrightarrow{grad}U=\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial U}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}$, поэтому

$$dU=\frac{\partial U}{\partial x}dx+\frac{\partial U}{\partial y}dy+\frac{\partial U}{\partial z}dz=F_xdx+F_ydy+F_zdz\cdot$$

Для данного поля получим

$$dU=(10x-3yz)dx+(10y-3xz)dy+(10z-3xy)dz.$$

Далее восстанавливаем функцию $U(x,y,z)$ по ее полному дифференциалу dU методом интегрирования выражения для dU от некоторой фиксированной точки, например, $O(0;0;0)$ до переменной точки $M(x;y;z)$ по ломаной, состоящей из отрезков, параллельных осям координат:

$$U(x,y,z)=\int\limits_{(0,0,0)}^{(x,y,z)} dU=\int\limits_{(0,0,0)}^{(x,y,z)}(10x-3yz)dx+(10y-3xz)dy+(10z-3xy)dz=$$

$$=\left\{\begin{array}{l}\text{на}\quad(1):\begin{cases}y=0\\ z=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}dy=0\\ dz=0\end{cases},\ x-\text{независимая переменная},\quad x_{нач}=0,\quad x_{кон}=x\\ \text{на}\quad(2):\begin{cases}x=\text{const}\\ z=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}dx=0\\ dz=0\end{cases},\ y-\text{независимая переменная},\quad y_{нач}=0,\quad y_{кон}=y\\ \text{на}\quad(3):\begin{cases}x=\text{const}\\ y=\text{const}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}dx=0\\ dy=0\end{cases},\ z-\text{независимая переменная},\quad z_{нач}=0,\quad z_{кон}=z\end{array}\right\}=$$

$$=\int\limits_{(0,0,0)}^{(x,0,0)}+\int\limits_{(x,0,0)}^{(x,y,0)}+\int\limits_{(x,y,0)}^{(x,y,z)}=\int\limits_{x=0}^{x}(10x-3\cdot 0\cdot 0)dx+\int\limits_{y=0}^{y}(10y-3x\cdot 0)dy+\int\limits_{z=0}^{z}(10z-3xy)dz=$$

$$=5x^2\Big|_{x=0}^{x}+5y^2\Big|_{y=0}^{y}+(5z^2-3xyz)\Big|_{z=0}^{z}=5x^2+5y^2+5z^2-3xyz=U(x,y,z).$$

Проверка:
$$\vec{F}=\overrightarrow{grad}U=(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{k})\cdot(5x^2+5y^2+5z^2-3xyz)=(10x-3yz)\vec{i}+(10y-3xz)\vec{j}+(10z-3xy)\vec{k},$$

что совпадает с данным вектором $\vec{F}$ в условии задачи, следовательно, функция $U(x,y,z)$ найдена правильно.

В ответе учтем, что потенциал векторного поля находится с точностью до постоянного слагаемого C.

Ответ к задаче* 8.1*: $U(x,y,z)=5(x^2+y^2+z^2)-3xyz+C$.

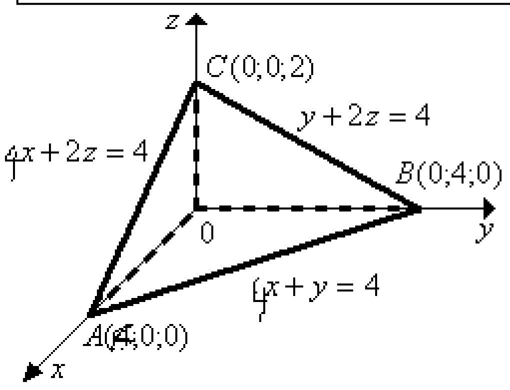
***Задача* 8.2**

Условие задачи в краткой форме:

$\vec{F}=(2x+3y)\,\vec{i}+(2y-3x)\,\vec{j}+(2z+3x)\,\vec{k}$, $\alpha: 4x+y+2z=4$; $\Pi-?$

Потоком Π векторного поля $\vec{F}$ через двухстороннюю поверхность (σ) в направлении ее нормали $\vec{n}$ называется поверхностный интеграл по поверхности (σ) от скалярного произведения вектора $\vec{F}$ на единичный вектор нормали к поверхности, т.е. теоретическая формула для вычисления величины потока имеет следующий вид:

$$\boxed{\Pi=\iint\limits_{(\sigma)}\vec{F}\cdot\vec{n}\;d\sigma=\iint\limits_{(\sigma)}(F_x\cos\alpha+F_y\cos\beta+F_z\cos\gamma)d\sigma}$$



где $\vec{n}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$.

В рассматриваемой задаче $F_x = 2x+3y,\ F_y = 2y-3x,\ F_z = 2z+3x$, поверхность (σ) является замкнутой поверхностью пирамиды $OABC$, направление нормали $\vec{n}$ - внешнее. Поэтому непосредственно по определению потока в данной задаче имеем рабочую формулу для его вычисления:

$$\boxed{\Pi = \iint\limits_{(\sigma)} ((2x+3y)\cos\alpha + (2y-3x)\cos\beta + (2z+3x)\cos\gamma)d\sigma}$$

Вычисление интеграла по поверхности сводится к вычислению двойного интеграла по проекции этой поверхности на одну из координатных плоскостей. Так как в данной задаче замкнутая поверхность (σ) образована кусками различных плоскостей, то нужно использовать свойства аддитивности поверхностного интеграла и проводить его вычисления как сумму четырех слагаемых:

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 + \Pi_4,$$

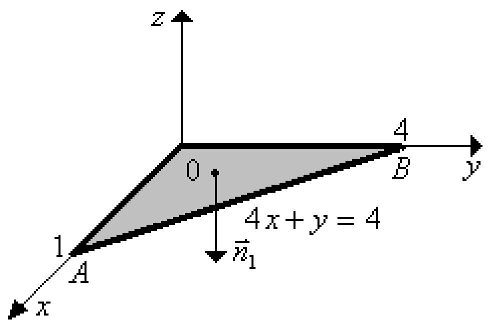
где Π_1 - это поток через нижнее основание OAB,

Π_2 -это поток через боковую грань AOC,

Π_3 -это поток через боковую грань BOC,

Π_4 -это поток через боковую грань ABC.

Вычисляем каждое слагаемое Π_1, Π_2, Π_3, Π_4 отдельно, для чего записываем проекции внешней нормали к каждой из граней пирамиды и сводим интеграл по поверхности к двойному интегралу.



Для Π_1: нормаль $\vec{n}_1 = \{0;\ 0;\ -1\}$;

уравнение поверхности (OAB):

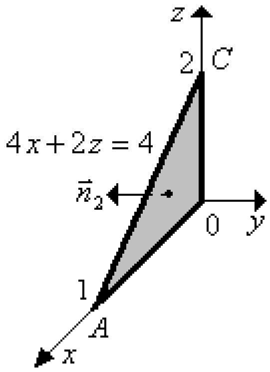
$z = 0 \ \Rightarrow\ d\sigma = dxdy$;

область $AOB: \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 4-4x \end{cases}$

$$\Pi_1 = \iint\limits_{AOB} (2z+3x)(-1)d\sigma = \iint\limits_{AOB} -3xdxdy = -3\int_0^1 dx \cdot x \int_0^{4-4x} dy =$$

$$= -3\int_0^1 x(4-4x)dx = -3(4\cdot\frac{x^2}{2} - 4\cdot\frac{x^3}{3})\Big|_0^1 = -3\left(\frac{4}{2} - \frac{4}{3}\right) =$$

$$= -\frac{3\cdot 4}{6} = \boxed{-2 = \Pi_1}.$$

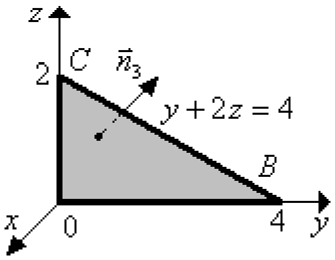


Для $П_2$: нормаль $\overrightarrow{n_2}=\{0;\,-1;\,0\}$;
уравнение поверхности (OAC): $y=0 \;\Rightarrow\; dy=0$;

область OAC: $\begin{cases}0\le x\le 1\\ 0\le z\le 2-2x\end{cases}$

$$П_1=\iint\limits_{AOC}(2y-3x)(-1)d\sigma=\iint\limits_{AOC}3xdxdz=-3\int\limits_0^1 xdx\int\limits_0^{2-2x}dz=$$

$$=3\int_0^1 x(2-2x)dx=3(x^2-\frac{2}{3}x^3)\Big|_0^1=3\cdot\frac{1}{3}=\boxed{1=П_2}.$$



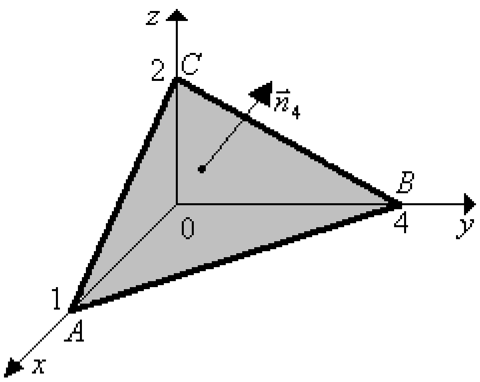
Для $П_3$: нормаль $\overrightarrow{n_3}=\{-1;\,0;\,0\}$;
уравнение поверхности (BOC): $x=0 \Rightarrow d\sigma=dydz$;

область BOC: $\begin{cases}0\le y\le 4\\ 0\le z\le \frac{1}{2}\left(4-y\right)\end{cases}$

$$П_3=\iint\limits_{BOC}(2x+3y)(-1)d\sigma=-3\iint\limits_{BOC}ydydz=-3\int\limits_0^4 dyy\int\limits_{z=0}^{\frac{1}{2}(4-y)}dz=$$

$$=-\frac{3}{2}(\frac{4}{2}y^2-\frac{1}{3}y^3)\Big|_0^4=-\frac{3}{2}(32-\frac{64}{3})=-\frac{3}{2}\cdot\frac{32}{3}=\boxed{-16=П_3}$$

.



Для $П_4$: нормаль $\overrightarrow{n_4}=\dfrac{\overrightarrow{\text{grad}}F}{|\text{grad}\,F|}$,
где $F(x,y,z)=0-$это уравнение поверхности (σ);

в данной задаче $F(x,y,z)=4x+y+2z-4\Rightarrow$
$\overrightarrow{\text{grad}}F=\{4;\,1;\,2\}$, $\left|\overrightarrow{\text{grad}}F\right|=\sqrt{4^2+1^2+2^2}=\sqrt{21}\Rightarrow$
$\overrightarrow{n_4}=\left\{\dfrac{4}{\sqrt{21}};\;\dfrac{1}{\sqrt{21}};\;\dfrac{2}{\sqrt{21}}\right\}$;

$$П_4=\iint\limits_{(ABC)}(\frac{4}{\sqrt{21}}(2x+3y)+\frac{1}{\sqrt{21}}(2y-3x)+\frac{2}{\sqrt{21}}(2z+3x))d\sigma=$$

$$=\iint\limits_{(ABC)}(8x+12y+2y-3x+4z+6x)\frac{d\sigma}{\sqrt{21}}=\iint\limits_{(ABC)}(11x+14y+4z)\frac{d\sigma}{\sqrt{21}}=$$

$$=\left\{\begin{array}{l}\text{сводим поверхностный интеграл I рода к двойному интегралу}\\ \text{по проекции поверхности } (ABC) \text{ на координатную плоскость } XOY;\\ \text{для этого из уравнения поверхности } (ABC) \text{ выражаем } z \text{ через } x, y \text{ и } d\sigma \text{ через } dx \text{ и } dy:\\ \\ 4x+y+2z=4 \Rightarrow z=\frac{1}{2}(4-4x-y),\\ d\sigma=\frac{1}{|\cos\gamma|}dS_{xy}=\sqrt{1+(z'_X)^2+(z'_Y)^2}\,dS_{xy}=\sqrt{1+(-2)^2+(-\frac{1}{2})^2}=\frac{\sqrt{21}}{2}dxdy\end{array}\right\}=$$

$$=\iint\limits_{AOB}(11x+14y+4\cdot\frac{1}{2}(4-4x-y))\frac{1}{\sqrt{21}}\frac{\sqrt{21}}{2}dxdy=$$

$$=\iint\limits_{AOB}(3x+12y+8)\frac{1}{2}dxdy=\frac{1}{2}\int_0^1 dx\int_{y=0}^{4-4x}(3x+12y+8)dy=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 dx(3xy+6y^2+8y)\Bigg|_{y=0}^{y=4-4x}=\frac{1}{2}\int_0^1(12x-12x^2+6(4-4x)^2+32-32x)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1(84x^2-212x+128)dx=(42\frac{x^3}{3}-106\frac{x^2}{2}+64x)\Bigg|_0^1=14-53+64=\boxed{25=\varPi_4}.$$

Складываем все слагаемые потока:
$\varPi=\varPi_1+\varPi_2+\varPi_3+\varPi_4=-2+1-16+25=\boxed{8=\varPi}$ -это значение потока через замкнутую поверхность пирамиды $ABCO$, вычисленное непосредственно.

По формуле Остроградского-Гаусса:

$$\boxed{\oiint\limits_{(\sigma^+)}\vec{F}\cdot\vec{n}d\sigma=\iiint\limits_{(V)}div\vec{F}dV}$$

где $div\vec{F}=\frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}+\frac{\partial F_z}{\partial z}$,

(V) – это объем, ограниченный замкнутой поверхностью (σ^+), направление нормали $\vec{n}$ к которой берется внешнее.

Поэтому

$$\boxed{\varPi=\iiint\limits_{(V)}(\frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}+\frac{\partial F_z}{\partial z})dV}$$

В данной задаче:

$$F_x = 2x+3y,\ F_y = 2y-3x,\ F_z = 2z+3x \ \Rightarrow\ \frac{\partial F}{\partial x} = 2,\quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2,\quad \frac{\partial F}{\partial z} = 2 \ \Rightarrow\ div\vec{F} = 6$$

$$П = \iiint\limits_{(ABCO)} 6\cdot dV = 6\cdot V_{ABCO} = 6\cdot\frac{1}{3}S_{осн}\cdot H = 6\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}1\cdot 4\cdot 2 = \frac{24}{3} = 8\,.$$

Очевидно, что значение потока, вычисленное непосредственно, и значение потока того же векторного поля, вычисленное по формуле Остроградского-Гаусса, должны совпадать.

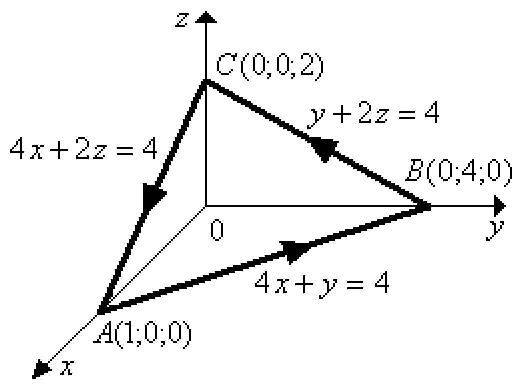
Так как получился поток $П = 8 > 0$, то это означает, что в замкнутой поверхности пирамиды $ABCO$ преобладают источники данного векторного поля над его стоками.

***Ответ к задаче* 8.2:** $П = 8$ (единиц потока).

***Задача* 8.3**

Условие задачи в краткой форме:

$\vec{F} = (2x+3y)\,\vec{i} + (2y-3x)\,\vec{j} + (2z+3x)\,\vec{k}$, $\quad \alpha: 4x + y + 2z = 4$; $Ц$– ?



Циркуляцией векторного поля $\vec{F}$ по замкнутому контуру (ABC) называется криволинейный интеграл второго рода от скалярного произведения вектора $\vec{F}$ на вектор бесконечно малого перемещения $\overrightarrow{dl} = \{dx;\ dy;\ dz\}$, то есть

$$\boxed{Ц = \oint\limits_{(ABC)} \vec{F}\cdot\overrightarrow{dl} = \oint\limits_{(ABC)} F_x dx + F_y dy + F_z dz}$$

На контуре (ABC) выберем обход против часовой стрелки, поскольку иное не оговорено в условии задачи.

В данной задаче $F_x = 2x+3y,\ \ F_y = 2y-3x,\ \ F_z = 2z+3x,$ поэтому расчетная формула для циркуляции имеет следующий вид:

$$\boxed{Ц = \oint\limits_{(ABC)} (2x+3y)dx + (2y-3x)dy + (2z+3x)dz}$$

Используя свойство аддитивности криволинейного интеграла, будем вычислять интеграл по замкнутой ломаной как сумму интегралов по её частям: $\oint\limits_{(ABC)} = \int\limits_{(AB)} + \int\limits_{(BC)} + \int\limits_{(CA)}$.

Сводим каждый криволинейный интеграл к определенному интегралу:

на участке (AB): $\begin{cases} z = 0 \Rightarrow dz = 0, \quad y = 4-4x \Rightarrow dy = -4dx, \\ x - \text{независим. перем.},\ x_{нач} = x_A = 1,\ x_{кон} = x_B = 0; \end{cases}$

уравнение $(BC):\begin{cases} x=0\Rightarrow dx=0, \quad y=4-2z\Rightarrow dy=-2dz,\\ z-\text{независим. перем.},\ z_{нач}=z_B=0;\ z_{кон}=z_C=2;\end{cases}$

уравнение $(CA):\begin{cases} y=0\Rightarrow dy=0, \quad z=2-2x\Rightarrow dz=-2dx,\\ x-\text{независим. перем.},\ x_{нач}=x_C=0,\ x_{кон}=x_A=1;\end{cases}$

$$Ц=\int\limits_{x=1}^{x=0}\Big(\underbrace{(2x+3(4-4x))dx}_{(2x+3y)dx}+\underbrace{(2(4-4x)-3x)\cdot(-4\cdot dx)}_{(2y-3x)dy}+\underbrace{0}_{(2z+3x)dz}\Big)+$$

$$+\int\limits_{z=0}^{z=2}\Big(\underbrace{0}_{(2x+3y)dx}+\underbrace{(2(4-2z)-3\cdot 0)(-2dz)}_{(2y-3x)dy}+\underbrace{(2z+3\cdot 0)dz}_{(2z+3x)dz}\Big)+$$

$$+\int\limits_{x=0}^{x=1}\Big(\underbrace{(2x+3\cdot 0)dx}_{(2x+3y)dx}+\underbrace{0}_{(2y-3x)dy}+\underbrace{(2(2-2x)+3x)(-2dx)}_{(2z+3x)dz}\Big)=$$

$$=\int\limits_1^0(2x+12-12x-32+32x+12x)dx+\int\limits_0^2(-16+8z+2z)dz+\int\limits_0^1(2x-8+8x-6x)dx=$$

$$=\int\limits_1^0(34x-20)dx+\int\limits_0^2(10z-16)dz+\int\limits_0^1(4x-8)dx=(17x^2-20x)\Big|_1^0+(5z^2-16z)\Big|_0^2+(2x^2-8x)\Big|_0^1=$$

$=(-17+20)+(20-32)+(2-8)=3-12-6=\boxed{-15=Ц}-$ это значение циркуляции по контуру (ABC), вычисленное непосредственно.

По формуле Стокса:

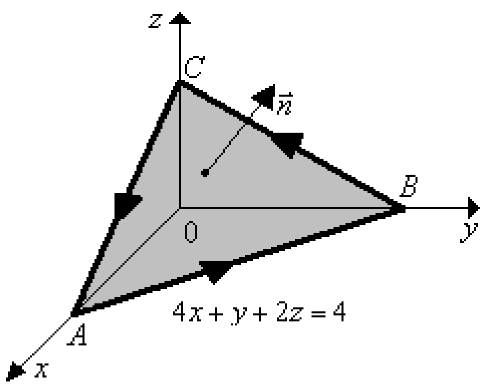
$$\boxed{Ц=\oint\limits_{(l)}F_x dx+F_y dy+F_z dz=\iint\limits_{(\sigma^+)}rot\vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma,}$$

где (σ^+_{ABC}) - это поверхность, опирающаяся на контур (l),
$\vec{n}$ - единичный вектор нормали к поверхности, направленный так, чтобы с его конца обход по контуру был виден против часовой стрелки.

Вычислим $rot\vec{F}$:

$$rot\vec{F}=\vec{\nabla}\times\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ F_x & F_y & F_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ 2x+3y & 2y-3x & 2z+3x\end{vmatrix}=$$

$=\vec{i}\,(0-0)-\vec{j}\,(3-0)+\vec{k}\,(-3-3)=-3\vec{j}-6\vec{k}\ \Rightarrow\ rot\vec{F}=\{0;-3;-6\}.$



В качестве поверхности (σ^+), опирающейся на контур ΔABC, можно выбрать плоскость треугольника с единичным вектором нормали $\vec{n}=\{\frac{4}{\sqrt{21}};\frac{1}{\sqrt{21}};\frac{2}{\sqrt{21}}\}$

(вычислялся в задаче 8.2). Поэтому $rot\vec{F}\cdot\vec{n} = -3\cdot\frac{1}{\sqrt{21}} - 6\cdot\frac{2}{\sqrt{21}} = -\frac{15}{\sqrt{21}} \Rightarrow$

$$Ц = \iint\limits_{(\sigma_{\Delta ABC})} -\frac{15}{\sqrt{21}}d\sigma = -\frac{15}{\sqrt{21}}S_{\Delta ABC} = \frac{-15}{\sqrt{21}}\cdot\frac{S_{\Delta AOB}}{\cos\gamma} = \frac{-15}{\sqrt{21}}\cdot\frac{\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 4}{\frac{2}{\sqrt{21}}} = -15$$ - это значение искомой циркуляции, вычисленное по формуле Стокса и, естественно, совпадающее со значением, вычисленным непосредственно.

Отрицательное значение циркуляции указывает на то, что под действием данного векторного поля фактическое движение по контуру (ABC) будет осуществляться в противоположном направлении – по часовой стрелке.

***Ответ к задаче* 8.3:** $Ц = -15$ (ед.работы).

6. Варианты заданий

Задание 1 **(3 балла)**

Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = z(x, y)$ в замкнутой области D, ограниченной заданными линиями. Результаты решения вынести на чертеж области D.

№ варианта	*Функция* $z = z(x, y)$	*Уравнения границ обл.* D
1	$z = x^2 - xy + 2y^2 + 3x + 2y + 1$	$x = 0,\ y = 0,\ x + y = -5$
2	$z = x^2 + y^2 - 6x + 4y + 2$	$x = 1,\ y = -3,\ x + y = 2$
3	$z = 5x^2 - 3xy + y^2 + 5x + 4$	$x = -1,\ y = -2,\ x + y = 1$
4	$z = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x - 1$	$x = -1,\ y = 0,\ x + y = 3$
5	$z = x^2 - 3xy + 4x + 8y$	$x = 0,\ y = 4,\ x + y = -2$
6	$z = x^2 - 4xy + 3y^2 + x - y$	$x = -1,\ y = -1,\ y + x = 5$
7	$z = 10 - x - 2xy - x^2$	$x = -3,\ y = -1,\ x + y = 0$
8	$z = 2x^2 + y^2 - xy + x - y + 3$	$x = -1,\ y = 2,\ x - y = 0$
9	$z = x^2 - y^2 + xy - 3x + 1$	$x = 0,\ y = 0,\ x + y = 4$
10	$z = x^2 + y^2 - xy + x - 4y$	$x = 1,\ y = 3,\ x + y = -3$
11	$z = 5xy - y^2$	$x = 4,\ y^2 = 5x + 5$
12	$z = x^2 - xy + 5$	$y = 0,\ x^2 + y = 1$

13	$z=2xy-3x^2-2y^2+7$	$x+y=5, x=-1, y=-1$
14	$z=x^2-xy+2y^2+3x+2y-2$	$x+y=-5,\ x=0,\ y=0$
15	$z=x^2+y^2-6x+4y+4$	$x+y=2,\ x=1,\ y=-3$
16	$z = x^2-xy+2y^2+3x+2y+1$	$x=1,\ y=0,\ x+y=-4$
17	$z = x^2+y^2-6x+4y+2$	$x=2,\ y=-4,\ x+y=2$
18	$z= 5x^2-3xy+y^2+5x+4$	$x=-2,\ y=-1,\ x+y=1$
19	$z = x^2-2y^2+4xy-6x-1$	$x=-3,\ y=-1,\ x+y=3$
20	$z = x^2-3xy+4x+8y$	$x=0,\ y=2,\ x+y=-2$
21	$z = x^2-4xy+3y^2+x-y$	$x=-1,\ y=0,\ y+x=5$
22	$z= 10-x-2xy-x^2$	$x=3,\ y=-1,\ x-y=0$
23	$z= 2x^2+y^2-xy+x-y+3$	$x=-2,\ y=2,\ x+y=0$
24	$z=x^2-y^2+xy-3x+1$	$x=1,\ y=1,\ x+y=4$
25	$z = x^2+y^2-xy+x-4y$	$x=3,\ y=1,\ x+y=-3$
26	$z=5xy-y^2+3$	$x=4,\ y^2=5x+5$
27	$z=x^2-xy+5$	$y=0,\ x^2+y=4$
28	$z=2xy-3x^2-2y^2+7$	$x+y=5,\ x=1,\ y=1$
29	$z=x^2-xy+2y^2+3x+2y-2$	$x+y=-5,\ x=0,\ y=1$
30	$z=x^2+y^2-6x+4y+4$	$x+y=2,\ x=0,\ y=-2$

Задание 2 **(3 балла)**

Дано двумерное скалярное поле $U = U(x, y)$, точка $M_0(x_0; y_0)$ и вектор $\vec{s}$. Требуется:

1) определить уравнения линий уровня и вектор $\overrightarrow{grad\,U}$, описать смысл этих характеристик скалярного поля; построить несколько линий уровня в системе координат xOy;

2) в точке M_0 найти градиент скалярного поля U, производную $\frac{\partial U}{\partial s}$ по заданному направлению $\vec{s}$ и величину скорости наибольшего возрастания функции U;

3) выполнить построение вектора $\overrightarrow{grad}\,U(M_0)$ и линии уровня, проходящей через точку M_0, описать их взаимное расположение; построить вектор $\vec{s}$, сравнить его направление с направлением $\overrightarrow{grad}\,U(M_0)$ и пояснить знак значения $\dfrac{\partial U}{\partial s}$.

№ варианта	Скалярное поле $U = U(x, y)$	Точка $M_0(x_0; y_0)$	Вектор $\vec{S}$
1	$U = x^2 + 3y^2 - 1$	$M_0(1; 1)$	$\vec{s} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$
2	$U = x^2 - 2y^2 + 1$	$M_0(2; 1)$	$\vec{s} = 6\vec{i} + 8\vec{j}$
3	$U = -3y - x^2 - 2$	$M_0(-1; -1)$	$\vec{s} = \vec{i} + 2\vec{j}$
4	$U = y^2 - 4x + 2$	$M_0(-2; 1)$	$\vec{s} = -2\vec{i} + 2\vec{j}$
5	$U = 2x^2 - y^2$	$M_0(-1; -1)$	$\vec{s} = -\vec{i} - 3\vec{j}$
6	$U = 2x^2 + y^2 - 2$	$M_0(1; 2)$	$\vec{s} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$
7	$U = x^3 - y + 3$	$M_0(1; -2)$	$\vec{s} = -2\vec{i} + \vec{j}$
8	$U = 2x + y^2 - 1$	$M_0(-2; 1)$	$\vec{s} = \vec{i} + 2\vec{j}$
9	$U = (x + 1)^2 + y^2$	$M_0(1; 2)$	$\vec{s} = \vec{i} - 2\vec{j}$
10	$U = 3x^2 - y^2$	$M_0(-1; 1)$	$\vec{s} = -2\vec{i} + 3\vec{j}$
11	$U = \ln(x^2 + y^2)$	$M_0(1; 1)$	$\vec{s} = 3\vec{i} - \vec{j}$
12	$U = \sqrt{x^2 + y^2}$	$M_0(1; 1)$	$\vec{s} = 3\vec{i} - \vec{j}$
13	$U = \sqrt{x^2 - y^2}$	$M_0(2; 1)$	$\vec{s} = \vec{i} - \vec{j}$
14	$U = \ln(x^2 - y^2)$	$M_0(2; 1)$	$\vec{s} = 3\vec{i} + \vec{j}$
15	$U = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$	$M_0(-1; -1)$	$\vec{s} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$
16	$U = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}}$	$M_0(1; 1)$	$\vec{s} = \vec{i} + \vec{j}$
17	$U = \ln(x^2 + 3y^2)$	$M_0(2; 0)$	$\vec{s} = 4\vec{i} - \vec{j}$
18	$U = \sqrt{-3y - x^2}$	$M_0(0; -3)$	$\vec{s} = \vec{i} + 2\vec{j}$
19	$U = x^2 - 2y^2 + 2$	$M_0(1; 3)$	$\vec{s} = 2\vec{i} - \vec{j}$
20	$U = \ln(y^2 - 4x)$	$M_0(0; 1)$	$\vec{s} = \vec{i} - 2\vec{j}$
21	$U = x^2 + 3y^2$	$M_0(1; 1)$	$\vec{s} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$
22	$U = x^2 - 2y^2$	$M_0(2; 1)$	$\vec{s} = 6\vec{i} + 8\vec{j}$
23	$U = -3y - x^2$	$M_0(-1; -1)$	$\vec{s} = \vec{i} + 2\vec{j}$

24	$U = y^2 - 4x$	$M_0(-2;\ 1)$	$\vec{s} = -2\vec{i} + 2\vec{j}$
25	$U = 2x^2 - y^2$	$M_0(1;\ 1)$	$\vec{s} = -\vec{i} - 3\vec{j}$
26	$U = 2x^2 + y^2$	$M_0(1;\ 2)$	$\vec{s} = 2\vec{i} + 2\vec{j}$
27	$U = x^3 - y$	$M_0(1;\ -2)$	$\vec{s} = -2\vec{i} + \vec{j}$
28	$U = 2x + y^2$	$M_0(-2;\ 1)$	$\vec{s} = \vec{i} + \vec{j}$
29	$U = (x+1)^2 + y^2$	$M_0(0;\ 2)$	$\vec{s} = \vec{i} - 2\vec{j}$
30	$U = 3x^2 - y^2$	$M_0(1;\ -1)$	$\vec{s} = -2\vec{i} + 3\vec{j}$

Задание 3 **(2балла)**

Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле.

№ *вар.*	**Повторный интеграл**	№ *вар.*	
1	$\int_{-3}^{0} dx \int_{-\sqrt{x+9}}^{-\sqrt{-2x}} f(x,y)dy$	**2**	$\int_{0}^{2} dx \int_{-\sqrt{2x-x^2}}^{0} f(x,y)dy$
3	$\int_{1}^{2} dy \int_{\frac{y}{2}}^{\frac{2}{y}} f(x,y)dx$	**4**	$\int_{-2}^{1} dy \int_{2+\sqrt{4-y^2}}^{4} f(x,y)dx$
5	$\int_{1}^{2} dx \int_{\frac{2}{x}}^{2x} f(x,y)dy$	**6**	$\int_{1}^{2} dx \int_{-3\sqrt{x-1}}^{-\sqrt{4x-x^2-3}} f(x,y)dy$
7	$\int_{-3}^{0} dx \int_{-\sqrt{x+9}}^{-\sqrt{-2x}} f(x,y)dy$	**8**	$\int_{-4}^{0} dy \int_{-\sqrt{9+y^2}}^{\frac{5}{4}y} f(x,y)dx$
9	$\int_{0}^{4} dy \int_{\sqrt{4y-y^2}}^{2\sqrt{y}} f(x,y)dx$	**10**	$\int_{0}^{1} dy \int_{\frac{1-y}{2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$
11	$\int_{0}^{1} dy \int_{\frac{1-y^2}{2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$	**12**	$\int_{0}^{1} dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)dx$
13	$\int_{1}^{2} dy \int_{\ln y}^{y} f(x,y)dx$	**14**	$\int_{0}^{1} dx \int_{e^{-x}}^{e^{x}} f(x,y)dy$
15	$\int_{0}^{1} dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)dx$	**16**	$\int_{0}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x} f(x,y)dy$
17	$\int_{-1}^{1} dy \int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{3-2y^2} f(x,y)dx$	**18**	$\int_{-1}^{0} dy \int_{1+\sqrt{1-y^2}}^{2-y} f(x,y)dx$

19	$\int_0^4 dx \int_{x-4}^{\sqrt{16-x^2}} \ln(1+x^2+y^2)dy$	**20**	$\int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{3-2y} f(x,y)dx$
21	$\int_1^2 dy \int_{\ln y}^{y} f(x,y)dx$	**22**	$\int_0^2 dx \int_{-\sqrt{2x-x^2}}^{0} f(x,y)dy$
23	$\int_{-\frac{3}{2}}^{1} dx \int_{x^2}^{\frac{3-x}{2}} f(x,y)dy$	**24**	$\int_{-4}^{0} dy \int_{-\sqrt{9+y^2}}^{\frac{5}{4}y} f(x,y)dx$
25	$\int_{-2}^{-1} dy \int_{-\sqrt{2+y}}^{0} f(x,y)dx + \int_{-1}^{0} dy \int_{-\sqrt{-y}}^{0} f(x,y)dx$	**26**	$\int_0^1 dy \int_0^y f(x,y)dx + \int_1^2 dy \int_0^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)dx$
27	$\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} f(x,y)dx + \int_1^2 dy \int_0^{\sqrt{2-y}} f(x,y)dx$	**28**	$\int_0^{\frac{\pi}{4}} dx \int_0^{\sin x} f(x,y)dy + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} dx \int_0^{\cos x} f(x,y)dy$
29	$\int_0^1 dx \int_0^{x^3} f(x,y)dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} f(x,y)dy$	**30**	$\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{x}} f(x,y)dy + \int_1^2 dx \int_0^{\sqrt{2-x}} f(x,y)dy$

***Задание 4 (*8баллов)**

Используя двойной интеграл, вычислить:

4.1 (2б.) площадь плоской фигуры, ограниченной заданными линиями;

4.2 (3б.) объем тела, ограниченного заданными поверхностями;

4.3 (3б.) указанную механическую характеристику плоской фигуры, ограниченной заданными линиями, если известна поверхностная плотность материала $\gamma(x,y)$ в точке с координатами (x; y). Обозначения механических характеристик: m - масса; M_x, M_y - статические моменты относительно координатных осей; I_x, I_y, I_0 - моменты инерции относительно координатных осей или относительно начала координат; $(x_C; y_C)$ - координаты центра масс.

№ *вар.*	**4.1**	**4.2**	**4.3**
1	$(x^2+y^2)^3 = y^2$	$z=2-x-y$, $y=x^2$, $y=x$, $z=0$	$y^2=3x$, $y^2=4-x$, $y=0$, $(y \ge 0)$; $\gamma(x,y)=const$; I_x -?
2	$x^2=8y$, $x^2=2y$, $y=6$	$z=2x^2+y^2+1$, $x+y=1$, коорд. плоскости	$y=\sin x$, $y=0$ $(0 \le x \le \pi)$; $\gamma(x,y)=const$; M_y -?

3	$(x^2+y^2)^2=2x^3$	$z=x+y+10$, $x^2+y^2=4$, $z=0$	$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=0$, $y=0$, $(y\geq 0)$; $\gamma(x,y)=const$; M_x-?
4	$\left(x^2+y^2\right)^3=4x^2y^2$	$z^2=1-x$, $y=x$, $y=0$, $z=0$	$x^2-y^2=9$, $y=0$, $4x-5y=0$, $(y\geq 0)$; $\gamma(x,y)=const$; M_y-?
5	$y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$, $y=x$, $y=\sqrt{4-x^2}$	$z=x^2+y^2$, $x^2+y^2=x$, $x^2+y^2=2x$, $z=0$	$x+y=5$, $x=-2$, $y=0$; $\gamma(x,y)=y$; I_0-?
6	$y=-1$, $y=-x$, $x^2+y^2=-2y$	$z=\frac{1}{4}y^2$, $z=0$, $2x-y=0$, $x+y=9$	$y=\sin x$, $y=0$, $x=\frac{\pi}{4}\left(0\leq x\leq\frac{\pi}{4}\right)$; $\gamma(x,y)=x$; M_y-?
7	$(x^2+y^2)^3=y^2$	$z=2-x-y$, $y=x^2$, $y=x$, $z=0$	$y^2=3x$, $y^2=4-x$, $y=0$, $(y\geq 0)$; $\gamma(x,y)=const$; M_x-?
8	$(x^2+y^2)^3=x^4+y^4$	$z=y$, $z=0$, $y=\sqrt{4-x}$, $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$	$x^2+y^2=1$, $x^2+y^2=9$, $y=0$, $(y\geq 0)$; $\gamma(x,y)=const$; $(x_C;y_C)$-?
9	$x^2+y^2=2x$, $x^2+y^2=2y$	$z=9-x^2-y^2$, $y=x^2$, $z=0$, $(0\leq y\leq 1)$	$xy=6$, $3x-2y=0$, $6x-y=0$, $(x\geq 0, y\geq 0)$; $\gamma(x,y)=x+y$; m-?
10	$(x^2+y^2)^2=8(x^2-y^2)$	$y=\frac{x^2}{2}$, $z=0$, $z=4-y^2$	$y=\sqrt{1-x^2}$, $y=\sqrt{4-x^2}$, $y=\sqrt{3}x$, $y=0$, $(x\geq 0)$; $\gamma(x,y)=const$; M_x-?
11	$x^2-2x+y=0$, $x+y=0$, $2x+y=3$	$x=4, y=4$, $z=x^2+y^2+1$, коорд. плоскости	$x=-\sqrt{1-y^2}$, $x+y=1$, $y=\frac{1}{2}$; $\gamma(x,y)=const$; M_x-?
12	$y=0$, $y=x$, $x^2+y^2=2x$	$y=1$, $y=x^2$, $z=0$, $z=x^2+y^2$	$y=x^2$, $y=2$; $\gamma(x,y)=y$; $(x_C;y_C)$-?
13	$(x^2+y^2)^2=x^2+2y^2$	$y=0$, $z=0$, $2x+3y-12=0$, $z=\frac{1}{2}x^2$, x=0	$y=0$, $x^2-2x+y-1=0$, $x=0$, $x=1$; $\gamma(x,y)=const$; M_y-?
14	$y^2-10x=25$, $9-6x=y^2$	$z=4-x^2-y^2$, $2z=2+x^2+y^2$	$xy=4$, $2x-y+2=0$, $x=4$, $y=0$, $(y\geq 0)$; $\gamma(x,y)=const$; M_y-?

15	$x^2+y^2=2y$, $y^2-2y+\frac{1}{2}x=0$	$z=0$, $x^2+y^2=9$, $x-y=z-1$	$xy=6$, $3x-2y=0$, $6x-y=0$, $(x\geq 0, y\geq 0)$; $\gamma(x,y)=2x+y$; m -?
16	$\rho=1+\cos\varphi$, $\rho=1$, $\rho\geq 1$	$z=2x^2+y^2+1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y=1$	$y^2=x$, $y^2=4x$, $x=4$, $(y\geq 0)$, $\gamma(x,y)=const$; M_x -?
17	$4y=x^2-4x$, $x-y-3=0$	$x^2+z^2=1$, $y=0$, $z=0$, $y=x$	$x^2+y^2=2y$, $y=-x$, $y=x$; $\gamma(x,y)=const$; $(x_C;y_C)$ -?
18	$x^2+y^2=4x$, $x^2+y^2=8x$, $y=x$, $y=\sqrt{3}x$	$x=1-y^2$, $x=0$, $z=0$, $x+y+z=4$	$y=x$, $y=x+1$, $y=1$, $y=3$; $\gamma(x,y)=const$; I_0 -?
19	$xy=4$, $x+y=5$	$z=x^2+y^2$, $2z=1-x^2-y^2$	$y^2=16-6x$, $y^2=2x$; $\gamma(x,y)=const$; I_y -?
20	$x^2+y^2=2x$, $x^2+y^2=4x$, $y=x$, $y=0$	$z=x^2+\frac{1}{2}y^2$, $x=1$, $x+y=2$, $x=0$, $y=0$, $z=0$	$x-y=6$, $3y=2x$, $y=3$; $\gamma(x,y)=const$; $(x_C;y_C)$ -?
21	$(x^2+y^2)^2=x^2+2y^2$	$x=0$, $y=0$, $z=0$, $2x+3y-12=0$, $z=\frac{1}{2}x^2$	$y=x$, $y=x+1$, $y=1$, $y=3$; $\gamma(x,y)=const$; I_0 -?
22	$x^2=8y$, $x^2=2y$, $y=6$	$z=2x^2+y^2+1$, $x+y=1$, коорд. плоскости	$y^2=3x$, $y^2=4-x$, $y=0$, $(y\geq 0)$; $\gamma(x,y)=const$; I_x -?
23	$(x^2+y^2)^2=2x^3$	$z=x+y+10$, $x^2+y^2=4$, $z=0$	$y^2=3x$, $y^2=4-x$, $y=0$, $(y\geq 0)$; $\gamma(x,y)=const$; I_y -?
24	$(x^2+y^2)^3=x^4+y^4$	$z=y$, $z=0$, $y=\sqrt{4-x}$, $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$	$y=x$, $y=x+1$, $y=1$, $y=3$; $\gamma(x,y)=const$; I_0 -?
25	$x^2+y^2=72$, $6y=-x^2$, $(y\leq 0)$	$18(x^2+y^2)+z=2$, $z=0$	$x=1$, $y^2=4x$; $\gamma(x,y)=7x^2$; m -?
26	$y=\frac{\sqrt{x}}{2}$, $y=\frac{1}{2x}$, $x=16$	$x+y=2$, $x=y^2$, $z=12y$, $z=0$	$x^2+y^2=1$, $x^2+y^2=4$; $\gamma(x,y)=\frac{1}{x^2+y^2}$; I_0 -?
27	$x^2-2x+y^2=0$, $x^2-6x+y^2=0$, $y=0$, $y=x$	$x+y=2$, $y=x^2$, $z=\frac{12x}{5}$, $z=0$	$y^2=\frac{x}{2}$, $x=2$; $\gamma(x,y)=2x+3y^2$; m -?

28	$x=5-y^2,$ $x=-4y$	$x+y=8,\ \ y^2=4x,$ $z=3y,\ \ z=0$	$x^2+y^2=4,\ \ x^2+y^2=16;$ $\gamma(x,y)=\dfrac{3}{x^2+y^2}$; m -?
29	$x^2-2x+y^2=0,$ $x^2-4x+y^2=0,$ $y=0,\ y=\sqrt{3}x$	$x^2+y^2=50,\ \ x^2=5y$ $z=0,\ z=\dfrac{6}{11}y$	$y=\dfrac{2}{x},\ y=7e^x,\ y=2,\ y=7;$ $\gamma(x,y)=x$; m -?
30	$y=11-x^2,$ $y=-10x$	$x+y=6,\ \ y^2=3x,$ $z=4y,\ \ z=0$	$x^2-2x+y^2=0,\ x^2-6x+y^2=0,$ $y=x,\ y=-x;$ $\gamma(x,y)=x^2+y^2$; m -?

***Задание 5 (*6 баллов)**

Используя тройной интеграл, вычислить:

5.1 (3б.) объем тела, ограниченного заданными поверхностями;

5.2(3б.)указанную механическую характеристику трехмерного тела, ограниченного заданными поверхностями, если известна объемная плотность материала $\gamma=\gamma(x,y,z)$ в точке с координатами (x;y;z). Обозначения механических характеристик: m - масса; M_l - статический момент относительно оси l; I_l, I_0 - моменты инерции относительно оси l или относительно начала координат; $(x_C;y_C;z_C)$ - координаты центра масс.

№ вар.	**5.1**	**5.2**
1	$x^2+y^2=2z,\ \ x^2+y^2=4,$ $z=-2$	$x^2+y^2+z^2=4,\ x^2+y^2+z^2=1;$ $\gamma=const;\ I_0-?$
2	$y=x^2,\ \ y+z=9,$ $z=-1,\ y=9$	$x^2+y^2+z^2=1,\ z=0,\ (z\ge 0);$ $\gamma=const;\ (x_C;y_C;z_C)-?$
3	$2x+z=2,\ \ x+z=1,$ $y^2=x$	$x^2+y^2+z^2=1;$ $\gamma=(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}};\ m-?$
4	$x^2+y^2+z^2=4,$ $x^2+y^2=3z$	$x^2+z^2=2y,\ y=2;$ $\gamma=const;\ (x_C;y_C;z_C)-?$
5	$\left(x^2+y^2+z^2\right)^2=xyz$	$x^2+z^2=2x,\ \ y=0,\ \ y=2$ $\gamma=y,\ \ M_{xoy}-?$
6	$\left(x^2+y^2+z^2\right)^2=x$	$x^2+y^2=4,\ z=2,\ z=0;$ $\gamma=const;\ I_x-?$
7	$x^2+y^2+z^2=4z-3,$ $z^2=4(x^2+y^2)$	$x^2+y^2=z,\ z=9;$ $\gamma=const;\ (x_C;y_C;z_C)-?$
8	$z=x^2+y^2,$ $z^2=x^2+y^2$	$x+2y+z=4,\ x=0,\ y=0,\ z=0;$ $\gamma=x+y;\ m-?$

9	$x^2+y^2-z^2=0,$ $x^2+y^2+z^2=4z$	$x=2,\ y=4,\ x+y+z=8,\ x=0,\ y=0,\ \ z=0;$ $\gamma=xy;\ m-?$
10	$x=2,\ y=4,\ x+y+z=8,$ $x=0,\ \ y=0,\ \ \ z=-2$	$x^2+y^2+z^2=2z;$ $\gamma=x^2+y^2+z^2;\ (x_C;y_C;z_C)-?$
11	$x^2+y^2+z^2=9,$ $x^2+y^2+z^2=6z$	$2z=y^2,\ 2x+3y-12=0,\ x=0,\ y=0,\ \ z=0;$ $\gamma=z;\ m-?$
12	$\left(x^2+y^2+z^2\right)^2=z(x^2+y^2)$	$x+y+z=2,\ x=0,\ y=0,\ \ z=0;$ $\gamma=yz;\ m-?$
13	$x^2+y^2-z^2=0,$ $z=6-x^2-y^2$	$z=1-x^2-y^2,\ \ z=0;$ $\gamma=const;\ (x_C;y_C;z_C)-?$
14	$x+y+z=4,$ $x=2, y=1, x=0,$ $y=0, z=1$	$x^2+y^2+z^2=9,\ x^2+y^2+z^2=36;$ $\gamma=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}};\ m-?$
15	$x^2+y^2+z^2=4z,$ $x^2+y^2-z^2=0$	$x^2+y^2+z=0,\ z=-9;$ $\gamma=const;\ (x_C;y_C;z_C)-?$
16	$z^2=x^2+y^2,$ $2y+3z=6$	$x^2+y^2+z^2=4;$ $\gamma=x^2;\ m-?$
17	$y^2+z^2=2x,$ $x=1$	$2z=x^2+y^2,\ \ x^2+y^2+z^2=3;$ $\gamma=(x+y)z;\ m-?$
18	$x^2+y^2+z^2=2y,$ $z=y$	$x^2+y^2=2,\ x^2+y^2=2z,\ z=0;$ $\gamma=y^2;\ m-?$
19	$x+y+z=6,\ \ \ x+2y=6,$ $x-0, y=0, z=0$	$y^2+z^2=4x,\ x=2;$ $\gamma=x;\ m-?$
20	$x^2+y^2=4,$ $y+z=2,$ $y-z=2$	$x^2+y^2+z^2=2x;$ $\gamma=const;\ I_0-?$
21	$x^2+y^2=4,$ $y^2+x^2=4-z,$ $y+z=2$	$x^2+y^2+z^2=4;$ $\gamma=y^2;\ m-?$
22	$x^2+y^2+z^2=8z-12,$ $z^2=4(x^2+y^2)$	$x^2+z^2=4-y,\ y=0;$ $\gamma=const;(x_C;y_C;z_C)-?$
23	$x^2+y^2+z^2=4,$ $x^2+y^2+z=4,\ (z\ge 0)$	$x+y+z=8,\ x=2,$ $y=6,\ x=0,\ y=0,\ \ z=0;$ $\gamma=const;\ I_{xoy}-?$

24	$(x^2+y^2+z^2)^2=2xyz$	$y^2+z^2=9-x,\ x=0;$ $\gamma=const;\ (x_C;y_C;z_C)-?$
25	$2x-y+z=2,$ $2x-y+2z=2,$ $y=0,\ x=0$	$x^2+y^2+z^2=4,\ x^2+y^2=1,\ z=0,\ (z\ge 0);$ $\gamma=z^3;\ m-?$
26	$x^2+y^2=6-z,$ $y=0,\ y=x,\ z=0$	$x^2+y^2=4,\ z=1,\ x^2+y^2=(z-4)^2;$ $\gamma=const;\ M_{xoy}-?$
27	$x^2+z^2=5-y,$ $y=1$	$x^2+y^2+z^2=4,\ x=0,\ y=0,\ z=0;$ $\gamma=const;\ M_{xoy}-?$
28	$x^2+y^2+z^2=4z,$ $z=3$	$3-x=y^2+z^2,\ x=-1;$ $\gamma=const;\ (x_C;y_C;z_C)-?$
29	$x^2+y^2+z^2=2,$ $x^2+y^2=z^2,$ $x=0,\ y=0$	$2x+y+z=2,\ 2x+y+2z=1,$ $x=0,\ y=0;$ $\gamma=const;\ I_{xoy}-?$
30	$(x^2+y^2+z^2)^3=z^4$	$x^2+y^2=9-z,\ x+y=3,\ z=0;$ $\gamma=const;\ M_{xoy}-?$

***Задание 6 (*6 баллов)**

Используя криволинейные интегралы, определить:

6.1(2б.) работу A, производимую силой $\vec{F}$ при перемещении точечной массы m вдоль дуги заданной линии (BC) в указанном направлении;

6.2(2б.) длину l или массу m при заданной линейной плотности для дуги (AB) заданной линии;

6.3 (2б.) функцию $U(x, y)$ по ее полному дифференциалу dU.

№ *вар.*	**6.1**	**6.2**	**6.3**
1	$\vec{F}=\left\{x;\ \frac{1}{y^2}\right\};$ $(BC):\ xy=1,\ 1\le x\le 4$	$(AB):\ \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1;$ $\gamma=\lvert y\rvert;\ m-?$	$dU=\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}-2y\right)dx+$ $+\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}-2x\right)dy$
2	$\vec{F}=\left\{x-y;\ x^2y^2\right\};$ $(BC):$	$(AB):\ \rho=1+\cos\varphi;$ $\gamma=\rho;\ m-?$	$dU=\left(3x^2\sin y-y^2\right)dx+\left(x^3\cos y-2xy\right)dy$

	$y = x^2,\ 1 \le x \le 2$		
3	$\vec{F} = \left\{\sin^2 x;\ y^2\right\}$; (BC): $y = \cos x$, $0 \le x \le \pi$	$(AB): x = \sin t,\ y = \cos t$; $\gamma = x^2 + y^2$; $m-?$	$dU = \dfrac{(x+2y)dx + ydy}{(x+y)^2}$
4	$\vec{F} = \left\{x - y;\ 1\right\}$; (BC): $x^2 + y^2 = R^2$, верхняя половина окружности, направление против часовой стрелки	(AB): $x = \cos t,\quad y = \sin t,\quad z = \dfrac{t}{2\pi}$ $\gamma = \dfrac{1}{x^2 + y^2 + z^2}$; $m-?$	$dU = (10xy^2 - ye^{xy})dx +$ $+ (10x^2 y - xe^{xy})dy$
5	$\vec{F} = \left\{-x;\ \dfrac{1}{y^2}\right\}$; (BC): $xy = 1$, $1 \le x \le 4$	$(AB): (x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$, $(x \ge 0)$; $\gamma = \sqrt{x^2 - y^2}$; $m-?$	$dU = \left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + y\right)dx +$ $+ \left(\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + x\right)dy$
6	$\vec{F} = \left\{x + y;\ z;\ x - y\right\}$; (BC): отрезок прямой от $C(1;\ 1;\ 1)$ до $B(2;2;2)$	(AB): $x = \cos t,\ y = \sin t,\ z = t$, $t \in [0; 2\pi]$; $\gamma = \dfrac{z^2}{x^2 + y^2}$; $m-?$	$dU = \left(ye^{xy} + 1\right)dx + \left(xe^{xy} + 2\right)dy$
7	$\vec{F} = \left\{\dfrac{1}{y}; -\dfrac{1}{x}\right\}$; (BC): $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$, $\dfrac{\pi}{6} \le t \le \dfrac{\pi}{3}$	(AB): $\rho = a\varphi$, $\varphi \in [0; 4\pi]$; $\gamma = \rho$; $m-?$	$dU = e^x(\cos y\, dx - \sin y\, dy)$
8	$\vec{F} = \left\{2 - y;\ x\right\}$; (BC): $x = t - \sin t,\ y = 1 - \cos t$, $0 \le t \le \pi$	(AB): $y^2 = 2x$, $x \in [0; 2]$; $\gamma = y$; $m-?$	$dU = 2x(1 - \sin(x^2 - y^2))dx +$ $+ 2y(1 + \sin(x^2 - y^2))dy$
9	$\vec{F} = \left\{xy;\ x + y\right\}$; (BC): отрезок прямой от $B(1;1)$ до $C(3;5)$	(AB): $\rho = \sin^3 \dfrac{\varphi}{3}$; $l-?$	$dU = (2xy - y^2)dx +$ $+ (x^2 - 2xy)dy$
10	$\vec{F} = \left\{x^2 + 2y;\ y^2 - 2x\right\}$; (BC): $y = 2 - \dfrac{x^2}{8}$ от $C(-4;0)$ до $B(0;2)$	(AB): $x^2 + y^2 = 4x$; $\gamma = x - y$; $m-?$	$dU = \dfrac{2xydy - y^2 dx}{x^2}$
11	$\vec{F} = \left\{x^2 + 2y;\ y^2 - 2x\right\}$;	(AB): $\rho = 2(1 + \sin\varphi)$; $l-?$	$dU = \left(xy^2 + 3xy - x\right)dx + \left(x^2 y + \dfrac{3}{2}x^2 + 1\right)dy$

	$(BC): y=\frac{1}{8}(x+4)^2$, от C(-4;0) до B(0;2)		
12	$\vec{F}=\{xy;\ x+y\}$; $(BC): y^2=x$, от B(1;1) до C(4;2)	$(AB): \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$, $x\ge 0,\ y\ge 0$; $\gamma=xy$; $m-?$	$dU=(2x^2+3y)dx+$ $+(3x-4y^2)dy$
13	$\vec{F}=\{x^2+y^2;\ xy\}$; $(BC): y=e^x$, от $C(0;1)$ до $B(1;e)$	$(AB): x=3\cos t$, $y=5\sin t$; $\gamma=y$; $m-?$	$dU=(y^2e^{xy}-3)dx+$ $+e^{xy}(1+xy)dy$
14	$\vec{F}=\{x^2+y+z;\ z^2;\ x+y^2\}$; (BC): отрезок прямой от $C(2;1;0)$ до $B(4;3;1)$	$(AB): \rho=2\varphi,\ \varphi\in[0;\pi]$; $\gamma=arctg\frac{y}{x}$; $m-?$	$dU=(y^2-10x)dx+(2xy+1)dy$
15	$\vec{F}=\{xy;\ x+y\}$; (BC): отрезок прямой от $C(2;1)$ до $B(4;3)$	$(AB): \begin{matrix} x=\cos t,\ y=\sin t, \\ z=t,\ t\in[0;\ 2\pi] \end{matrix}$; $\gamma=\frac{z^2}{x^2+y^2}$; $m-?$	$dU=e^x(\cos y\,dx-\sin y\,dy)$
16	$\vec{F}=\{-y^2;\ xy\}$; $(BC): x=a\cos t$, $y=b\sin t,\ 0\le t\le\frac{\pi}{2}$	(AB): $x=(t-\sin t),\ \ y=(1-\cos t)$, $0\le t\le\pi$; $\gamma=y$; $m-?$	$dU=(\sin(x+y)+x\cos(x+y))dx+$ $+x\cos(x+y)dy$
17	$\vec{F}=\{x^3y;\ x+y\}$; (BC): отрезок прямой от $C(2;1)$ до $B(4;3)$	$(AB): \rho^2=4\cos 2\varphi$; $\gamma=(x+y)$; $m-?$	$dU=(2x\sin y-x^2+1)dx+$ $+(x^2\cos y-y^2)dy$
18	$\vec{F}=\{x/(x^2+y^2);\ -y/(x^2+y^2)\}$; $(BC): x^2+y^2=9$, направление по часовой стрелке	$(AB): \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$; $\gamma=\lvert x\rvert$; $m-?$	$dU=(8x-y)dx+(6y^2-x)dy$
19	$\vec{F}=\{x;-y\}$; $(BC): \begin{cases} x=a(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}$, от $C(2\pi a;0)$ до $B(0;0)$	(AB): прямолинейный отрезок между точками $O(0;0)$ и $B(1;2)$; $\gamma=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+4}}$; $m-?$	$dU=\frac{xdx+2{,}5dy}{\sqrt{x^2+5y+6}}$
20	$\vec{F}=\{x^2+y;x+y^2\}$; (BC): отрезок прямой от $C(-2;1)$ до $B(4;3)$	$(AB): x=\cos^3 t,\ \ y=\sin^3 t$, $t\in\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$; $\gamma=(x^2+y^2)$; $m-?$	$dU=(y\cos x+2xy^2)dx+$ $+(\sin x-\sin y+2x^2y)dy$

21	$\vec{F} = \left\{x/(x^2+y^2); -y/(x^2+y^2)\right\}$ $(BC):\ x^2+y^2=1$, направление против часовой стрелки	(AB): $x=\cos t,\ y=\sin t,\ z=t,$ $t\in[0;2\pi];$ $\gamma=\dfrac{1}{x^2+y^2}$; $m-?$	$dU=(\sin(x+y)+x\cos(x+y))dx+$ $+x\cos(x+y)dy$
22	$\vec{F}=\left\{\dfrac{1}{y};\ -\dfrac{1}{x}\right\}$; $(BC):\ x=\cos^3 t$, $y=\sin^3 t$, $\dfrac{\pi}{6}\le t\le\dfrac{\pi}{3}$.	(AB): $\rho=2\varphi$, $\varphi\in[0;4\pi]$; $\gamma=3\rho$; $m-?$	$dU=e^x(\cos y\,dx-\sin y\,dy)$
23	$\vec{F}=\left\{-\dfrac{1}{y};\ \dfrac{1}{x}\right\}$ $(BC):\ x=\cos^3 t$, $y=\sin^3 t$, $\dfrac{2\pi}{3}\le t\le\dfrac{5\pi}{6}$.	(AB): $\rho=\cos^3\dfrac{\varphi}{3}$; $\gamma=3\rho$; $m-?$	$dU=(2xy-y^2)dx+$ $+(x^2-2xy)dy$
24	$\vec{F}=\left\{-x/(x^2+y^2);\ y/(x^2+y^2)\right\}$ $(BC):\ x^2+y^2=16$, направление против часовой стрелки	(AB): $\rho^2=4\cos 2\varphi$; $\gamma=x+y$; $m-?$	$dU=e^x(\cos y\,dx-\sin y\,dy)$
25	$\vec{F}=\left\{x^2;1-2xy\right\}$; $(BC):\begin{cases}x=3\sin t\\ y=2\cos t\end{cases}$, $0\le t\le\dfrac{\pi}{2}$	(AB): $x=1-y^2,\ x\in[0;1]$; $\gamma=\lvert y\rvert$; $m-?$	$dU=(2x+3y)dx+(3x-4y)dy$
26	$\vec{F}=\left\{2;-y\right\}$; $(BC):\begin{cases}x=t-\sin t\\ y=1-\cos t\end{cases}$, $0\le t\le 2\pi$	(AB): $2x-3y=4,\ x\in[-2;2]$; $\gamma=x+y$; $m-?$	$dU=(x^4+4xy^3)dx+(6x^2y^2-5y^4)dy$
27	$\vec{F}=\left\{-x;2y^2\right\}$; $(BC):\begin{cases}x=2\cos t\\ y=\sin t\end{cases}$, $0\le t\le\pi$	(AB): $y=\ln x,\ x\in[1;2]$; $\gamma=x^2$; $m-?$	$dU=\dfrac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$
28	$\vec{F}=\left\{\dfrac{x}{3};y\right\}$; $(BC):\begin{cases}x=\cos^3 t\\ y=\sin^3 t\end{cases}$, $0\le t\le\dfrac{\pi}{2}$	(AB): $y=e^x,\ x\in[0;1]$; $\gamma=y$; $m-?$	$dU=(5x+2y)dx+(2x-y^2)dy$

29	$\vec{F} = \{xy; 5y\}$ (BC): отрезок прямой от $B(1;2)$ до $C(-1;-2)$	(AB): $x = t - \sin t,\ y = 1 - \cos t,$ $t \in [0; 2\pi];$ $l - ?$	$dU = (x + 4xy^3)dx + (6x^2y^2 - 1)dy$
30	$\vec{F} = \left\{x + 2; -y^2\right\}$ (BC): отрезок прямой от $B(2;4)$ до $C(-2;4)$	(AB): $x = 2\cos t,\ y = 2\sin t,\ z = t,$ $t \in [0; 2\pi];$ $l - ?$	$dU = \sin(x^2 - y^2) \cdot (xdx - ydy)$

Задание 7 (**3балла)**

Используя поверхностный интеграл первого рода, найти площадь S указанной части заданной поверхности.

№ *вар.*	**Поверхность**
1	полусфера $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$
2	часть параболоида $x^2 + y^2 = 6z$, заключенная внутри цилиндра $x^2+y^2 = 27$
3	часть параболоида $1 - z = x^2 + y^2$, $0 \le z \le 1$
4	часть конуса $x^2 + y^2 = 3z^2$, заключенная внутри цилиндра $x^2+y^2 = 1$
5	полусфера $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$
6	усеченный конус $x^2 + y^2 = z^2,\ 1 \le z \le 2$
7	часть параболоида $2z = x^2 + y^2,\ 0 \le z \le 2$,
8	сечение цилиндра $x^2 + y^2 = 1$ плоскостью $x + y + z = 2$
9	часть поверхности конуса $z^2 = x^2 + y^2$, расположенная в первом октанте между плоскостями $z = 1$ и $z = 3$
10	шаровой сегмент $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $1 \le z \le 3$

11	часть параболоида $2z = x^2 + y^2$, расположенная между цилиндрами $x^2 + y^2 = 1, \quad x^2 + y^2 = 4$
12	шаровой слой: $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $0 \le z \le \sqrt{3}$
13	шаровой сегмент $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$, $2 \le z \le 4$
14	поверхность $z^2 = 4x$, расположенная в первом октанте и вырезанная поверхностями $y^2 = 4x$ и $x = 1$
15	часть поверхности конуса $z^2 = x^2 + y^2$, расположенная в первом октанте между плоскостями $z = 1$ и $z = 4$.
16	часть поверхности параболоида $2z = x^2 + y^2$, заключенной между цилиндрами $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 9$.
17	часть поверхности $x^2 + y^2 = z$, вырезанная цилиндрами $x^2 + y^2 = 2$, $x^2 + y^2 = 6$
18	часть поверхности конуса $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, отсеченная поверхностями $y = x^2$, $y = 1$.
19	часть цилиндра $y^2 + z^2 = 4$, заключенная внутри другого цилиндра $x^2 + y^2 = 4$
20	часть поверхности конуса $16(x^2 + y^2) = 9z^2$, $0 \le z \le 4$
21	часть поверхности конуса $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, отсеченная поверхностями $y^2 = x$, $x = 1$
22	часть параболоида $2z = x^2 + y^2$, $0 \le z \le 2$
23	часть параболоида $2z = -(x^2 + y^2)$, $-4 \le z \le 0$
24	часть поверхности конуса $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, отсеченная поверхностями $y = x^2$ и $y = 4$
25	часть параболоида $x^2 + y^2 + z = 3, \quad 0 \le z \le 3$

26	часть полусферы $z=-\sqrt{4-x^2-y^2}$, $-1\le z\le 0$
27	часть параболоида $x^2+y^2+z=3,\quad 0\le z\le 3$, расположенная в первом октанте
28	часть конуса $z^2=x^2+y^2,\ 0\le x\le 1,\ \ 0\le y\le 1$
29	часть параболоида $2z=x^2+y^2,\quad 2\le x^2+y^2\le 8$
30	часть полусферы $x^2+y^2+z^2=16,\quad 2\le z\le 4$

Задание **8 (8баллов)**

Решить следующие задачи для векторных полей.

8.1 (2б.) Доказать, что векторное поле $\vec{F}$ потенциально, и найти его потенциал.

8.2 (3б.) Найти поток векторного поля $\vec{F}$ через полную поверхность пирамиды, ограниченной плоскостью α и координатными плоскостями, в направлении внешней нормали к ее поверхности (непосредственно и по формуле Остроградского-Гаусса).

8.3(3б.) Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{F}$ по замкнутому контуру пересечения плоскости α с координатными плоскостями (непосредственно и по формуле Стокса).

№ вар.	**8.1**	**8.2, 8.3**
1	$\vec{F}=(10x-3yz)\vec{i}+(10y-3xz)\vec{j}+(10z-3xy)\vec{k}$	$\vec{F}=(2x+3y)\vec{i}+(2y-3x)\vec{j}+(2z+3x)\vec{k}$, $\alpha:\quad x+y+2z=4$
2	$\vec{F}=(13x+5yz)\vec{i}+(13y+5xz)\vec{j}+(13z+5xy)\vec{k}$	$\vec{F}=(3z-x)\vec{i}+(2x+3y)\vec{j}+(y+3x)\vec{k}$, $\alpha:\quad 3x+2y+3z=6$
3	$\vec{F}=(7x-yz)\vec{i}+(7y-xz)\vec{j}+(7z-xy)\vec{k}$	$\vec{F}=(x-y)\vec{i}+(2x+z)\vec{j}+(x-z)\vec{k}$, $\alpha:\quad x+y+3z=3$
4	$\vec{F}=(3x-5yz)\vec{i}+(3y-5xz)\vec{j}+(3z-5xy)\vec{k}$	$\vec{F}=(2x-3z)\vec{i}+(2x+3y)\vec{j}+(y-3z)\vec{k}$, $\alpha:\quad 2x+y+z=4$
5	$\vec{F}=(2x+3yz)\vec{i}+(2y+3xz)\vec{j}+(2z+3xy)\vec{k}$	$\vec{F}=(x+3z)\vec{i}+(2y+x)\vec{j}+(3x-z)\vec{k}$ $\alpha:\quad 4x+3y+4z=12$

6	$\vec{F}=(6x+7yz)\vec{i}+(6y+7xz)\vec{j}+(6z+7xy)\vec{k}$	$\vec{F}=(2x-y)\vec{i}+(3z+y)\vec{j}+(x+y)\vec{k}$, $\alpha:\ \ 2x+y+z=4$
7	$\vec{F}=(10x-3yz)\vec{i}+(10y-3xz)\vec{j}+(10z-3xy)\vec{k}$	$\vec{F}=(x+3y)\vec{i}+(2z-y)\vec{j}+(3z-x)\vec{k}$, $\alpha:\ \ x+3y+3z=3$
8	$\vec{F}=(7x-2yz)\vec{i}+(7y-2xz)\vec{j}+(7z-2xy)\vec{k}$	$\vec{F}=(2y-x)\vec{i}+(3x+2y)\vec{j}+(z+x)\vec{k}$, $\alpha:\ \ 2x+3y+3z=6$
9	$\vec{F}=(8x-5yz)\vec{i}+(8y-5xz)\vec{j}+(8z-5xy)\vec{k}$	$\vec{F}=(x+y)\vec{i}+(3x-2y)\vec{j}+(6x-2y)\vec{k}$, $\alpha:\ \ 3x+2y+z=6$
10	$\vec{F}=(4x+3yz)\vec{i}+(4y+3xz)\vec{j}+(4z+3xy)\vec{k}$	$\vec{F}=(2x-y)\vec{i}+(2y-x)\vec{j}+(x+z)\vec{k}$ $\alpha:\ \ x+y+z=2$
11	$\vec{F}=(11x-6yz)\vec{i}+(11y-6xz)\vec{j}+(11z-6xy)\vec{k}$	$\vec{F}=(x-3y)\vec{i}+(2y-x)\vec{j}+(x-z)\vec{k}$, $\alpha:\ \ 2x+y+2z=2$
12	$\vec{F}=(5x-3yz)\vec{i}+(5y-3xz)\vec{i}+(5z-3xy)\vec{k}$	$\vec{F}=(2x-z)\vec{i}+(y-z)\vec{j}+(2z+y)\vec{k}$, $\alpha:\ \ 2x+y+3z=6$
13	$\vec{F}=(4yz-3x)\vec{i}+(4xz-3y)\vec{j}+(4xy-3z)\vec{k}$	$\vec{F}=(3x-y)\vec{i}+(y-2z)\vec{j}+(x+y)\vec{k}$ $\alpha:\ \ 3x+3y+2z=6$
14	$\vec{F}=(3yz+x)\vec{i}+(3xz+y)\vec{j}+(3xy+z)\vec{k}$	$\vec{F}=(x+3z)\vec{i}+(2y-x)\vec{j}+(2z-x)\vec{k}$, $\alpha:\ \ 3x+3y+z=6$
15	$\vec{F}=(6x+7yz)\vec{i}+(6y+7xz)\vec{j}+(6z+7xy)\vec{k}$	$\vec{F}=(2x-y)\vec{i}+(3z+y)\vec{j}+(x+y)\vec{k}$, $\alpha:\ \ 2x+y+z=4$
16	$\vec{F}=(13x-5yz)\vec{i}+(13y-5xz)\vec{j}+(13z-5xy)\vec{k}$	$\vec{F}=(y-z)\vec{i}+(2y+x)\vec{j}+(z+x)\vec{k}$, $\alpha:\ \ x+3y+2z=6$
17	$\vec{F}=(7yz-3x)\vec{i}+(7xz-3y)\vec{j}+(7xy-3z)\vec{k}$	$\vec{F}=(2x+z)\vec{i}+(3x-z)\vec{j}+(z-y)\vec{k}$, $\alpha:\ \ 2x+y+3z=6$
18	$\vec{F}=(10x-3yz)\vec{i}+(10y-3xz)\vec{j}+(10z-3xy)\vec{k}$	$\vec{F}=(2x+3y)\vec{i}+(2y-3x)\vec{j}+(2z+3x)\vec{k}$, $\alpha:\ \ x+y+2z=4$
19	$\vec{F}=(13x+5yz)\vec{i}+(13y+5xz)\vec{j}+(13z+5xy)\vec{k}$	$\vec{F}=(3z-x)\vec{i}+(2x+3y)\vec{j}+(y+3x)\vec{k}$, $\alpha:\ \ 3x+2y+3z=6$
20	$\vec{F}=(7x-yz)\vec{i}+(7y-xz)\vec{j}+(7z-xy)\vec{k}$	$\vec{F}=(x-y)\vec{i}+(2x+z)\vec{j}+(x-z)\vec{k}$, $\alpha:\ \ x+y+3z=3$
21	$\vec{F}=(6x+7yz)\vec{i}+(6y+7xz)\vec{j}+(6z+7xy)\vec{k}$	$\vec{F}=(2x-y)\vec{i}+(3z+y)\vec{j}+(x+y)\vec{k}$, $\alpha:\ \ 2x+y+z=4$
22	$\vec{F}=(8x-5yz)\vec{i}+(8y-5xz)\vec{j}+(8z-5xy)\vec{k}$	$\vec{F}=(x+y)\vec{i}+(3x-2y)\vec{j}+(6x-2y)\vec{k}$, $\alpha:\ \ 3x+2y+z=6$

23	$\vec{F}=(7yz-3x)\vec{i}+(7xz-3y)\vec{j}+(7xy-3z)\vec{k}$	$\vec{F}=(2x+z)\vec{i}+(3x-z)\vec{j}+(z-y)\vec{k}$, $\alpha: \quad 2x+y+3z=6$
24	$\vec{F}=(7yz-3x)\vec{i}+(7xz-3y)\vec{j}+(7xy-3z)\vec{k}$	$\vec{F}=(2x-z)\vec{i}+(3x-z)\vec{j}+(z-y)\vec{k}$, $\alpha: \quad 2x+2y+3z=6$
25	$\vec{F}=2xz^3\vec{i}+3\vec{j}+3x^2z^2\vec{k}$	$\vec{F}=(y-z)\vec{i}+x\vec{j}+(y+4z)\vec{k}$, $\alpha: 2x+2y+z-2=0$
26	$\vec{F}=6x^2\vec{i}+3y^2z\vec{j}+y^3\vec{k}$	$\vec{F}=(y+3z)\vec{i}+2y\vec{j}+(2x+y)\vec{k}$, $\alpha: 2x+3y+z-1=0$
27	$\vec{F}=6xz^2\vec{i}+3y^2\vec{j}+6x^2z\vec{k}$	$\vec{F}=(x+z)\vec{i}+(y-z)\vec{j}+2x\vec{k}$, $\alpha: x+2y+2z-2=0$
28	$\vec{F}=6x^2\vec{i}+2yz\vec{j}+y^2\vec{k}$	$\vec{F}=(2x+1)\vec{i}+2z\vec{j}+(y-z)\vec{k}$, $\alpha: 2x+3y+4z-6=0$
29	$\vec{F}=2y\vec{i}+(2x+2yz)\vec{j}+y^2\vec{k}$	$\vec{F}=2z\vec{i}+(x-2y)\vec{j}+(x+z)\vec{k}$, $\alpha: x+2y+4z-4=0$
30	$\vec{F}=3x^2y\vec{i}+x^3\vec{j}-2xz\vec{k}$	$\vec{F}=3y\vec{i}+(x+2z)\vec{j}+(x-z)\vec{k}$, $\alpha: x+5y+z-5=0$

Приложение. Образец оформления титульного листа

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ

ФГАОУ ВО **«Мурманский государственный технический университет»**

Кафедра цифровых технологий,
математики и экономики

Расчетно-графическая работа

«Дифференциальное и интегральное исчисления ФНП и их приложения»

по дисциплине «Дополнительные разделы математического анализа»

Вариант

выполнил:	студент группы ИВТ-21о
	Федоров Ф.Ф.
проверил:	доцент Кацуба В.С.
оценка:	______________________
дата:	______________________

Мурманск, 2022